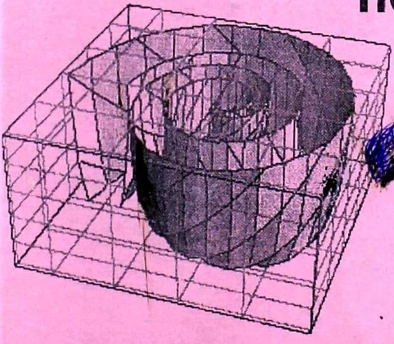
Асылбеков Т. Д.
Кожобеков К. Г. Сопуев У. А.

32.97
А 91

MathCAD

Компьютердик математиканын негиздери



ОКУУ КОЛДОНМО

Ош-2008

32.97
А 91

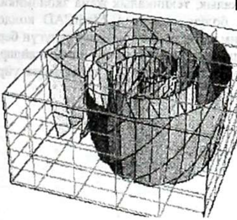
КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН БИЛИМ БЕРҮҮ

ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

ОШ МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ

MathCAD

Компьютердик математиканын негиздери



7673
ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
БИБЛИОТЕКА
944219

Ош шаары, 2008-жыл

УДК 004
ББК 32.973-01
А 91

Рецензенттер: Сопуев А., физика-математика илимдеринин доктору, профессор, ОшТУнун окуу иштери боюнча проректору

Анарбаева Г.М., физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент, Программалоо кафедрасынын башчысы

Асылбеков Т.Д., ж.б.

А91 **MathCAD. Компьютердик математикага киришүү**: Окуу колдонмо / Т.Д.Асылбеков, К.Г. Кожобеков, У.А.Сопуев – Ош: ОшМУнун «Билим» редакциялык-басма бөлүмү, 2008. – 76 б.

ISBN 978-9967-03-453-2

Окуу колдонмодо азыркы учурдагы математикалык системалардын арасында популярдуу болгон MathCAD чөйрөсү жөнүндө теориялык жана практикалык материалдар каралат. Колдонмодогу теориялык материалдарда MathCAD чөйрөсүнүн компоненттеринин касиеттери, методдору жана окуялары берилип, алардын колдонулушу практикалык мисалдардын жардамында көрсөтүлгөн.

MathCAD – бул математикалык, техникалык жана экономикалык маселелерди чечүү үчүн Windows – тиркеме болуп эсептелет. MathCAD колдонуучуга негизги математикалык маселелердин чечимдерин тез алуу мүмкүнчүлүгүн берет.

Бул колдонмо кыргыз тилинде окуган жогорку окуу жайлардын студенттери жана MathCAD системасында маселелерди чечүүнү өз алдынча үйрөнүүнү каалаган колдонуучуларга сунушталат.

ОшМУнун Окумуштуулар Кеңеши тарабынан басмага сунушталды

А 2404090000-08 **УДК 004**
ББК 32.973-01

ISBN 978-9967-03-453-2

©Ош мамлекеттик университети, 2008

Мазмуну

Киришүү

Математикалык жана илимий-техникалык эсептөөлөрдү жүргүзүү жекече компьютерлерди колдонуунун негизги чөйрөсү болуп эсептелет. Бул эсептөөлөрдү жүргүзүү негизинен жогорку деңгээлдеги программалоо тилдеринин жардамында түзүлгөн программалардын жардамында аткарылат. Мындай программаларды түзүүдө адис эмес колдонуучулар үчүн кыйынчылыктар пайда болушу мүмкүн. Мындай абалдан чыгуу үчүн математикалык эсептөөлөрдү автоматташтыруучу программалык системаларды колдонуу максатка ылайыктуу. Бул колдонмодо ушундай математикалык системалардын бирөөсү болгон MathCADдын мүмкүнчүлүктөрү каралат.

MathSoft Inc.(АКШ) фирмасы 1986-жылы MathCAD системасынын биринчи версиясын чыгарган. Mathcad – бул математиканын бардык бөлүмдөрүнүн маселелеринин чечимдерин табууну автоматташтыруу үчүн колдонулган система. Системанын аталышы MATHematica(математика) жана CAD(Computer Aided Design-автоматтык проектирлөө системасы) эки сөздөн алынган.

Mathcad 2000 дин жаңы версиясы үч негизги вариантта иштелип чыккан:

1. Mathcad 2000 Standard — окутуу максатында колдонулган жана көпчүлүк колдонуучуларга ылайыкташтырылып жөнөкөйлөтүлгөн вариант;
2. Mathcad 2000 Professional (же PRO) — математиктерге жана илимий-педагогикалык кызматкерлер үчүн ылайыкташтырылган профессионалдык вариант;
3. Mathcad 2000 Premium — Профессионалдык математиктер жана окумуштуулар үчүн кеңейтилген вариант.

Mathcad — тез өнүгүп жаткан система болуп эсептелет. Жаңы мүмкүнчүлүктөр менен версиялары жаңылanууда. Mathcad 7.0 PRO версиясы бир нече өзгөчөлүктөргө ээ:

- 2000 дин кемчилдиктери жоюлган;
- колдонуучунун интерфейси кайра иштелген жана Word 95/97 тексттик процессорунун интерфейсине жакындаштырылган;
- Документке жаңы жолчону Enter (или Ctrl+F9) клавишасын басуу менен койсо болот;
- Жаңы жолчону Backspace (или Ctrl+FlO) клавишасын басып өчүрүүгө болот ;
- Ж.б.у.с. 20дан ашык мүмкүнчүлүктөр кошулган.

Mathcad 8.0 PRO версиясында дагы көптөгөн жаңы мүмкүнчүлүктөр кошулган:

- 50дөй жаңы математикалык функциялар (элементардык, атайын, статистикалык ж.б.);
- maximize и minimize жаңы оптимизациялоо функциялары;

- Сызыктуу программалоо маселелери;
- Сызыктуу эмес теңдемелердин системаларын чечүүнүн өнүктүрүлгөн блогу;
- Бинардык эсептөөлөрдү жүргүзүү мүмкүнчүлүгү;
- Find (издөө) и Replace (тап жана алмаштыр) редактирлөө командалары;
- Татаал үч өлчөмдүү графиктерди түзүү үчүн колдонулуучу мастерлер;
- Үч өлчөмдүү графиктерди Shift клавишасын басып, анимациялоо.
- Ж.б.у.с.

MathCAD – бул математикалык, техникалык жана экономикалык маселелерди чечүү үчүн Windows – тиркеме болуп эсептелет. Бул системада документ экранда кандай көрүнсө кагазга да ошондой чыгат. MathCAD колдонуучуга негизги математикалык маселелердин чечимдерин тез алуу мүмкүнчүлүгүн берет.

MathCADдын интерфейсинин негизги элементтери

1) MathCADдын терезеси;

2) геометриялык түзүүлөрдү аткаруу үчүн жана математикалык операторлордун кызматтарын колдонуу үчүн пайдаланылган стационардык менюнун мүмкүнчүлүктөрү;

3) Insert Function(функцияны коюу) диалогдук терезеси. Бул MathCADдын негизги панелинен ачылып, 250дөн ашык функцияларга ээ;

4) информациялык блоктун Resource Center көп деңгээлдүү менюсу;

5) Help 3-беттүү справкалык бөлүм;

Бул программада эсептөөлөр ченемге ээ болгон чыныгы жана комплекстик сандардын үстүнөн жүргүзүлөт. MathCADдын операторлорунун негизги типтери:

1) алгебралык өзгөртүп түзүүлөр;

2) алгебралык теңдемелерди жана барабарсыздыктарды, теңдемелердин системаларын символдук чечүү;

3) матрицалык өзгөртүп түзүү;

4) дифференцирлөө жана интегралдоо;

5) каалаган сандагы компоненттерди суммалоо жана көбөйтүү;

6) функционалдык өзгөртүп түзүүлөр;

7) Функционалдык программалоо;

8) Логика алгебрасы.

MathCADга тиркелген функциялардын библиотекасы

1) дифференциалдык теңдемелердин системаларын сандык интегралдоочу 10дон ашык функцияларын.

2) 60тан ашык ыктымалдуулуктар теориясынын функцияларын;

3) 20дан ашык математикалык статистиканын функцияларын;

4) берилгендерди апроксимациялоо жана тегиздөөчү 20дан ашык функцияларын;

алып жүрөт.

Программаны түзүүчүлөр математиканын бардык бөлүктөрүн камтуучу системаны түзүүгө аракеттенишкен.

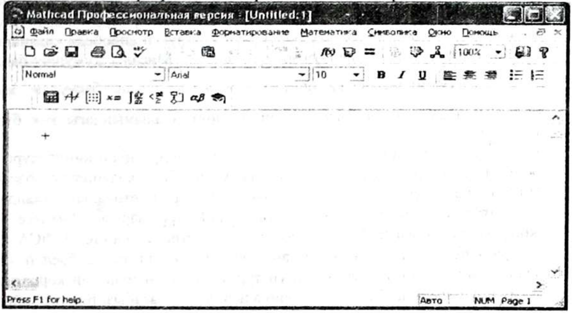
Колдонмо негизинен Ош мамлекеттик университетинин математика жана информациялык технологиялар факультетиндеги «Математика», «Колдонмо математика жана информатика», «Информатика», «Эсептөө техникаларын жана автоматташтырылган системаларды программалык камсыздоо» (ПОВТАС), «Маалыматтарды иштетүүнү жана башкарууну автоматташтыруу системалары» (АСОИУ), «Информациялык системалар жана технологиялар» адистиктеринин студенттерине жана MathCAD системасында маселелерди чечүүнү өз алдынча үйрөнүүнү каалаган колдонуучуларга сунушталат.

Бул колдонмону жогорку окуу жайларда MathCAD системасы боюнча лекциялык, практикалык жана лабораториялык сабактарды өтүү, студенттердин билимин бышыктоо жана текшерүү үчүн пайдаланса болот. Ошондой эле колдонуучу математикалык ар кандай илимий багыттагы маселелерди сандык чечүү, алынган жыйынтыктардын графиктерин түзүү мүмкүнчүлүгүн алат.

Глава I. Элементардык математика

§1. Формулаларды кийирүү жана редактирлөө

MathCAD программасын жүктөгөндө анын терезеси пайда болот.



Терезенин көпчүлүк бөлүгүн редактирлөө аймагы түзүп, жумушчу барактын көрүнүүчү бөлүктөрүн ээлеп турат. Бул баракта клавиатуранын жана мыштын жардамында маселелер коюлуп редактирленип жыйынтыктары эсептелет, геометриялык түзүүлөр жүргүзүлөт. Терезенин менюсунда негизги эки кнопка кошулган

Математика(Math), Символика(Symbolics) (1)

Негизи панелдин төмөнкү катарында MathCADдын инструменттеринин кнопкалары жайгашкан:

(2)

Бул кнопкаларга мыштын сол кнопкасын басып тиешелүү панелдерди ачабыз:

1) калькулятор, 2) геометриялык түзүүлөр, 3) матрицалык эсептөөлөр, 4) негизги математикалык белгилер, 5) матанализ, 6) логика алгебрасынын функциялары, 7) программалоо, 8) грек алфавити, 9) символдук эсептөөлөрдүн операторлору.

Эгерде (2) панель жок болсо Просмотр\Панели\Математика (View\Toolbars\Math) командасын аткаруу керек. Анда панел тик бурчтук формасында чыгат. Аны мыштын жардамында башка формага өзгөртүүгө болот.

Редактирлөө аймагынын жогорку бөлүгүнүн сол бурчунда кийирүүнү баштоо абалын көрсөтүүчү «+» белгиси жайгашкан.

Бул белгини мыштын кнопкасын көрсөткүчтү башка орунга жылдырып басуу менен, же башкаруучу клавишалардын жардамында жылдырууга болот. Кийинки жолчонун башталышына <enter> клавишасы аркылуу жылат. Жумушчу баракка кийрилген символдор автоматтык түрдө тик бурчтуу рамкага алынып, ал берилген туюнтмага резервделет. Мындай аймак блок деп аталат. Мисалы Si символун терсек $\boxed{Si}$ блогун көрөбүз. Блоктун ичинде кийирүү позициясы көк түстөгү бурч көрүнүшүндө берилет. Бул бурчтун төмөнкү бөлүгүнүн узундугун «пробел» клавишасын бир нече жолу басуу менен өзгөртүүгө болот. Мисалы жумушчу баракка $\frac{1+2\cdot 3}{3.5}+5$ туюнтмасын кийирүүдө «/» клавишасын басуудан мурун «пробел» клавишасын басуу менен бөлчөктүн алымындагы көк бурчту $\boxed{1+2\cdot 3}$ көрүнүшүнө келтирип, анан 3,5 ти кийиргенден кийин курсорду бөлүмдө калтырбоо үчүн дагы бир жолу «пробел» клавишасын басабыз. Цифра жана символдорду, «+»,«-», «*» арифметикалык амалдарын клавиатуранын цифралык бөлүгүнөн кийирүү зарыл. Антпесе ката жөнүндө кабар чыгат. Эгерде туюнтма кийрилгенден кийин MathCAD аны аткара албаса, анда аткарылбаган туюнтма кызыл түскө боелуп калат. Туюнтманы аткаруу үчүн, бөлүнүп турган блоктон мыштын көрсөткүчүн жумушчу барактын башка бөлүгүнө алып барып басабыз. Блокту кайрадан бөлүп алсак катанын мазмуну жөнүндө маалымат кошо чыгат. Мисалы,

$\boxed{\sin(x) = \blacksquare\,\blacksquare}$

This variable or function
is not defined above.

Блоктогу туюнтма солдон оңго карай аткарылат. Ошондуктан жолчодогу курсорду жылдыруу үчүн «→» клавишасын колдонуу максатка ылайыктуу.

x^y даражасы жумушчу баракка клавишалардын «x» ««shift»+«^»» «y» «пробел» удаалаштыгында кийрилет.

Төмөнкү индекс сол квадраттык кашаанын («[») жардамында жазылат. Мисалы, «x» «[» «i» «пробел» удаалаштыгы жумушчу баракка x_i туюнтмасын пайда кылат. Литердик белгилөөлөр чекиттин («.») жардамында кийрилет. «y» «.» «1» удаалаштыгы y_1 ди, ал эми «M» «.» «x» удаалаштыгы M_x ти берет.

:= ыйгаруу оператору <<Shift>+<:>> клавишалары менен, ал эми эсептөөлөрдүн жыйынтыгы <=> клавишасы аркылуу чыгарылат. Мисалы, төмөнкү үч блоктон турган жолчону карайлы:

$$a := 2 \qquad b := 3 \qquad \boxed{a + b = 5\,\blacksquare} \tag{3}$$

Enter клавишасын, же мышты рамканың сырткы бөлүгүнө бир жолу бассак рамка, көк түстөгү бурч, жана метка жок болот. <<Ctrl>+<=>> комбинациясынын жардамында теңдеш барабардык белгиси кийрилет. Бул белги Given(берилди), Solve(Чечүү) ж.б. сыяктуу урунттуу сөздөрүн колдонууда пайдаланылат.

$i := m,...,n$ бүтүн сандардын маанилеринин удаалаштыгы үтүрлүү чекит аркылуу төмөнкүдөй берилип,

<i><<Shift>+<:>><m> <;> <n>

жумушчу баракта $i := m..n$ көрүнүшүндө болот(m жана n дин арасында эки гана чекит коюлат). Баракка кийрилген ар бир функциянын аты кашаанын ичинде жазылган өзгөрүлмө менен коштолуп жазылышы зарыл. Мисалы, MathCAD $y := x^2$ деген жазууну түшүнбөйт да, $y(x) := x^2$ деп жазсак кабыл алат. <ins> клавишасы бурч белгисин белгисине өзгөртөт жана тескерисинче аткарууга болот. Эгерде белги көрүнүшүндө болсо, анда кийрилген маалыматтар бул белгинин алдында жайгашат. Антпесе тескерисинче болот.

$\boxed{x^2 + 2 \cdot x - 3}$ $\boxed{■ := x^2 + 2 \cdot x - 3}$

(3) төгү ■ көрүнүшүндөгү метка бекер коюлган эмес. Биринчиден эгерде (3) тө алынган жыйынтыкты белгилөө талап кылынса, ал блоктун көрүнүшүн <пробел> клавишасынын жардамында төмөнкү көрүнүшкө өзгөртөбүз:

$\boxed{a + b = 5}$

Анан <<Shift>+<:>> комбинациясын басып,

$\boxed{■ := a + b}$

алабыз да белгилөөнү кийиребиз. Экинчиден, мейли, мисалы (3) тө алынган жыйынтык бурчтун чоңдугу болсун. MathCADда бурчтар радиандардын жардамында ченелет. Аны градуска которуу үчүн 5 тин жанындагы меткага курсорду коюп, deg кызматчы сөзүн кийиребиз да мыштын сол кнопкасын рамканын сырткы бөлүгүнө басабыз. Анда

$a + b = 286.479\,\mathrm{deg}$

алынат. Үчүнчүдөн меткага жогоркудай эле жол менен rad(радиан) кызматчы сөзүн кийирсек кайрадан

$a + b = 5\,\mathrm{rad}$

алабыз.

MathCADдын чөйрөсүндө кийирүү позициясын аныктаган метканы толтуруу үчүн, жогорку мисалдарда байкалгандай мыштын сол кнопкасын позицияга бир жолу бассак, көк бурчча менен бөлүнөт. Андан кийин сандык же символдук берилгендерди кийире баштайбыз. Бир нече меткалардын арасында курсорду жылдырууну башкаруу клавишаларынын, же <Tab> клавишасынын жардамында эң ыңгайлуу жол менен ишке ашыруу мүмкүн.

Тик бурчтуу рамканын ичинде редактирлөө процесси кадимки эреже менен атарылат. Кийрилген бардык символдордун асты көк сызык менен сызылган болсо(антпесе <пробел> клавишасын басуу менен сызылат), анда <Backspace> клавишасын бир жолу басуу менен бөлүп алып, <del> клавишасын бассак, символдор өчүрүлөт. Алгач MathCAD жүктөлгөндө формулалык редактордо гана иштейт. Тексттик коментарийлерди орус тилинде кийирүү үчүн клавиатуранын раскладкасы орус тилинде турган абалда <<Shift>+<">> комбинациясын басабыз (шрифт Arial Cyr же Times New Roman Cyr болуш керек) да тексттик коментарийди кийиребиз. Текст кийирилгенден кийин мыштын сол кнопкасын тексттик блоктун сырткы бөлүгүнө басабыз. Ушул тартипте кийирилген текстти буфердик «эс» аркылуу Word тексттик редакторуна кадимки жолдор менен коюга болот.

Мыштын сол кнопкасын MathCADдын инструменттер панелиндеги кнопкасына бассак, редактирлөө терезесинде төмөнкү «калькулятор» пайда болот:

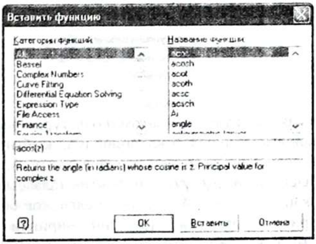
Калькулятордун кнопкалары «Коюу» режиминде иштейт. Б.а. мыштын сол кнопкасын терезедеги ар бир кнопкага бассак, барактын талаасына анын тиешелүү белгиси пайда болот. Ошондуктан калькулятор эсептөө жана барактын талаасына анын панелинде жайгашкан математикалык белгилерди коюу сыяктуу кош кызматты аткарат. Мейли, мисалы, барактын талаасына $x+\sqrt{x+1}$ туюнтмасын кийирүү талап кылынсын. Клавиатурадан <x><+> символдорун кийирип, мыштын көрсөткүчүн калькулятордун $\sqrt{\ }$ кнопкасына коюп, сол кнопкасын бассак, барактын талаасында

$$x+\sqrt{\blacksquare}$$

пайда болот. Меткага <x> <+> <1> символдорун кийирүү керек. Квадраттык тамыр белгисин <\> клавишасынын жардамында да кийирүү мүмкүн.

Катыш символдору (2) панелдеги кнопкасынын, ал эми грек алфавитинин тамгалары $\alpha\beta$ кнопкасынын жардамында коюлат. π саны <<Ctrl>+<Shift>+<P>> комбинациясынын жардамында кийирилет.

MathCADдын терезесинин негизги панелиндеги $f(x)$ кнопкасынын жардамында «Функцияны коюу» диалогдук терезеси ачылат:



(4)

«Function Category»(функциялардын категориялары) терезесиндеги биринчи «All»(Баары) жолчосун белгилөө, «Function Name»(функциялардын аттары) терезесиндеги каталогдун каалаган функциясын жалпы тизмеден тандоо мүмкүнчүлүгүн берет. Ал эми «Category»(функциялардын категориялары) терезесиндеги калган пункттар функцияларды категорияларга бөлүп тандоо мүмкүнчүлүгүн берет. MathCADдын орусча версиясында «функциялардын категориялары», «функциялардын аталыштары» терезелериндеги түрүү тилкелери болбошу мүмкүн. Мындай учурда көрүнбөй калган функцияны табуу үчүн, (4)түн керектүү терезесинде мыштын көрсөткүчүн сол кнопканы баскан абалда жылдыруу(төмөн же жогору) керек. Тиешелүү категорияны жана функцияны тандап «OK» кнопкасын бассак, тандалган функцияны колдонуу шаблону пайда болот. Мисалы баракка логарифмдерди эсептөөчү шаблонду чакыралы:

$$\log(\blacksquare,\blacksquare)$$

Мунун сол меткасына логарифми эсептелүүчү сан, ал эми оң жагына логарифмдин негизи кийрилет. Меткаларды толтуруп <=> клавишасын бассак

$$\log(16,2) = 4\,,$$

жыйынтыгын алабыз.

Мисал 1.1.1. Жөнөкөйлөткүлө: $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

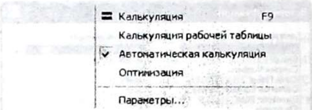
Чыгаруу. Калькулятор панелинин жана бир шаблонго экинчи шаблонду коюу мүмкүнчүлүктөрүн пайдаланып төмөнкүдөй жыйынтык алабыз:

$$-\log\left(\log\left(\sqrt{\sqrt[4]{2}},2\right),2\right) = 3$$

Жооп: 3.

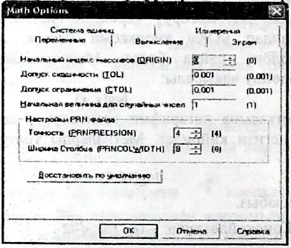
§2. Жөнөкөй символдук эсептөөлөр

1. MathCADдын менюсундагы Математика кнопкасына мыштын көрсөткүчүн алып келип, сол кнопкасын бассак, сандык эсептөөлөрдү жана алардын параметрлерин башкаруучу төмөнкү панелин чакырат:



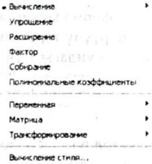
(5)

«Автоматическая калькуляция»(автоматтык түрдө эсептөө) жолчосундагы ✓ белгиси коюлган учурда эсептөөлөрдүн жыйынтыктары туюнтманы кийирип, <=> белгисин басар менен пайда болот. Ал эми функциялардын графиктери мыштын көрсөткүчүн графиктин талаасынын сырткы бөлүгүнө бир жолу басканда түзүлөт. Эгерде бул белги жок болсо, анда эсептөөлөр жана геометриялык түзүүлөр (5) тин биринчи жолчосундагы <=> кнопкасына мышты басуу менен же f9 клавишасын басуу менен жүргүзүлөт. ✓ белгиси «Автоматическая калькуляция» жолчосуна мышты басуу менен коюлат(же жок кылынат). Белги коюлбаган учурда эсептөөлөр жана график түзүүлөр (5)тин экинчи жолчосуна мыштын көрсөткүчүн алып барып сол кнопкасын бир жолу басуу аркылуу ишке ашырылат. Ал эми «Оптимизация» режиминде символдук процессор иштеп, мүмкүнчүлүк болушунча туюнтма жөнөкөйлөтүлүп, андан кийин эсептөө жүргүзүлөт. Б.а. жөнөкөйлөткөндөн кийин «Автоматическая калькуляция» режиминдегидей эле ишке ашат. (5) панелдин акыркы жолчосу эсептөөлөрдүн параметрлерин өзгөртүү терезесин чакырат:



«Переменные»(өзгөрүлмөлөр) терезесинде көрүнүп тургандай, массивдердин баштапкы индекси(ORIGIN) алгач 0 гө, сандык эсептөөлөрдүн каталыгы(TOL) 0,001ге, эсептөө блокторундагы чектөөлөр (CTOL) 0,001ге барабар.

2. MathCAD дын менюсундагы Символика кнопкасына мыштын көрсөткүчүн алып келип сол кнопкасын бассак, символдук эсептөөлөрдүн, матрицалар менен иштөөнүн, жана символдук эсептөөлөрдү башкаруучу панель ачылат.



(6)

Бармактын талаасына кандайдыр алгебралык туюнтманы кийирип, көк бурч менен бөлүп алабыз. Анан (6) панелдеги тиешелүү жолчого мыштын сол кнопкасын бир жолу бассак, туюнтманын оң жагына же төмөн жагына эсептөөнүн стилине жараша жыйынтык жазылат.

Мисалы, эгерде барактын талаасына

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{4}}+1}, \tag{7}$$

туюнтмасын кийирип, «Упростить»(жөнөкөйлөт) жолчосуна мышты бассак,

$$x^{\frac{1}{4}}-1,$$

жыйынтыгын алабыз.

«Расширение»(кеңейтүү) командасынын жардамында кашаалар ачылып, окшош мүчөлөр топтоштурулат. Мисалы,

$$(x-1)\cdot(x+2) \tag{8}$$

туюнтмасына аталган команданы колдонсок,

$$x^2+x-2 \tag{9}$$

жыйынтыгын алабыз. Ал эми «фактор» командасы тескересинче (9) ду (8) көрүнүшүнө алып келет. «Собирание» (топтоо) – окшош мүчөлөргө келтирүү мүмкүнчүлүгүн берет. (6) нын «Полиномиальные коэффициенты» (полиномиалдык коэффициенттер) пунктуна мыштын сол кнопкасын бир жолу бассак көп мүчөнүн коэффициенттеринин мамычасынан турган вектор пайда болот.

Жогорку мүмкүнчүлүктөрдү карасак, эки негизги кемчилдикти байкоого болот:

1) Жыйынтыктар алгачкы туюнтма менен байланышпай калат;

2) Жыйынтыкка алып келүүчү өзгөртүп түзүүлөр белгисиз.

Бул кемчилдиктерди MathCADдын башка мүмкүнчүлүктөрүнүн жардамында жоюга болот. (6) панелдин кийинки үч жолчосунун мүмкүнчүлүктөрү да жогоркудай кемчилдиктерге ээ болгондуктан азырынча карабайбыз.

Мыштын сол кнопкасын (6) панелдин «Стиль вычислений»(эсептөөлөрдүн стили) жолчосуна басуу менен жыйынтыктарды чыгаруу формаларын аныктоо жана коментарийлерди берүү мүмкүнчүлүктөрүн берүүчү терезени чакырабыз.

(6) нын биринчи жолчосундагы ‣ үч бурчтугу

Символичный Shift+F9
Плавающая точка... (10)
Комплексный

командаларын чакырат.

«Символичный»(символдук) жолчосун активдештирсек, өзгөртүп түзүүлөр башталат жана символдук (аналитикалык) эсептөөлөрдүн жыйынтыктары чыгарылат. Мыштын көрсөткүчүн (10)дун «Плаваюшая точка» жолчосуна алып барып сол кнопкасын бир жолу басып төмөнкү диалогдук терезени ачабыз:

MathCADда жылуучу(плавающей) үтүргө ээ сан катары төмөнкү көрүнүштөгү сандарды айтабыз:

$$x = \pm 10^p \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot 10^{-k}.$$

Берилген диалогдук терезеде n мааниси берилет.

(10) догу акыркы жолчо $x+yi$ комплекстик өзгөрүлмөсүн символдук эсептөөлөр үчүн колдонулат. $x+yi$ туюнтмасы «x» «+» «y» «*»«1i» (1 менен i нин ортосуна көбөйтүү белгиси коюлбайт) көрүнүшүндө терилет. Ошол эле учурда MathCADдын негизги белгилөөлөрү стандарттык түрдө болот:

$$x = \mathrm{Re}(x+yi),\ \ y = \mathrm{Im}(x+yi),\ \ |x+yi| = \sqrt{x^2+y^2},\ \ \varphi = \arg(x+yi), \varphi \in]-\pi,\pi].$$

Мисалы барактын талаасына $\underline{\mathrm{Re}(\exp(x + y\cdot 1i))}$ туюнтмасын кийирип, мыштын көрсөткүчүн (10)дун «Комплексный» жолчосуна алып барып, сол кнопкасын бассак, функциянын чыныгы бөлүгү $\exp(x)\cdot\cos(y)$ экранда пайда болот. Комплекстик сандардын үстүнөн жүргүзүлгөн амалдардын жыйынтыктары «=» клавишасынын жардамында чыгарылат. Мисалы,

1. $(1-2\cdot i)(3+4\cdot i) = 11-2i$
2. $\left|1+\sqrt{3}\cdot i\right| = 2$
3. $\sqrt{1+1\cdot i} = 1.099 + 0.455i$
4. $\dfrac{1-2\cdot i}{3+4\cdot i} = -0.2-0.4i$
5. $\arg(1-i) = -0.785$
6. $i^i = 0.208$

Мисал 1.2.1. $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$ туюнтмасынын бардык маанилерин тапкыла.

Чыгаруу.

$z := \sqrt{3} - i \qquad m := 4 \qquad k := 0..m-1$

$$w_k := (|z|)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\arg(z) + 2\cdot\pi\cdot k}{m} \right) + i\cdot\sin\left(\frac{\arg(z) + 2\cdot\pi\cdot k}{m} \right) \right)$$

$$w = \begin{pmatrix} 1.179 - 0.155i \\ 0.155 + 1.179i \\ -1.179 + 0.155i \\ -0.155 - 1.179i \end{pmatrix}$$

§3. Урунттуу сөздөр боюнча символдук эсептөөлөр

MathCADдын кнопкасы «Symbolic Keyword Palette» (символдук эсептөөлөрдүн урунттуу сөздөрү) панелин чакырат:

Symbolic				
→	▪→	Modifiers	float	complex
assume	solve	simplify	substitute	factor
expand	coeffs	collect	series	parfrac
fourier	laplace	ztrans	invfourier	invlaplace
invztrans	n^T →	n^{-1} →	|n| →	

(11)

→, ▪→ кнопкаларынын жардамында символдук эсептөөлөрдүн жыйынтыктарын чыгаруучу операторлор кийрилет. Эгерде кандайдыр туюнтма белгиленип турган болсо, мышты → кнопкасына басып ал туюнтманы оператор менен толуктайбыз. **«Modifiers»** кнопкасынын жардамында модификацияланган командалардын менюсу ачылат. (11) панелдин каалаган ар бир кнопкасы баракка тиешелүү трафареттик(шаблон) талааны коет. Тиешелүү шаблонго туюнтманы толтуруп, анын блогунун сыртына мышты басып же <enter> клавишасын бассак жыйынтык пайда болот.

«Simplify» кнопкасына мыштын көрсөткүчүн алып барып сол кнопкасын бассак баракта төмөнкү шаблон пайда болот:

▪ simplify → .

Белгиленген позициядан баштап алгебралык туюнтма кийирилет. Анан рамканын сырткы аймагына мыштын көрсөткүчүн алып барып, сол кнопканы бассак жөнөкөйлөтүүнүн жыйынтыгы пайда болот.

Мисал 1.3.1. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө.

$$\frac{\left(\frac{3}{2\cdot x - y} - \frac{2}{2\cdot x + y} - \frac{1}{2\cdot x - 5\cdot y} \right)}{\frac{y^2}{4\cdot x^2 - y^2}};$$

Чыгаруу:

$$\frac{\left(\frac{3}{2\cdot x-y}-\frac{2}{2\cdot x+y}-\frac{1}{2\cdot x-5\cdot y}\right)}{\frac{y^2}{4\cdot x^2-y^2}} \text{ simplify } \rightarrow \frac{-24}{(2\cdot x-5\cdot y)}$$

Жооп: $\frac{-24}{(2\cdot x-5\cdot y)}$;

Мисал 1.3.2. Параметрлердин берилген маанилеринде жөнөкөйлөтүп, анан эсептегиле.

$$\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2\cdot c}{a\cdot b}\right)\cdot(a+b+2\cdot c)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a\cdot b}-\frac{4\cdot c^2}{a^2\cdot b^2}} \qquad a = 7,4 \qquad b=\frac{5}{37}$$

Чыгаруу:

$$y(a,b,c) := \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2\cdot c}{a\cdot b}\right)\cdot(a+b+2\cdot c)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a\cdot b}-\frac{4\cdot c^2}{a^2\cdot b^2}}$$

$$y(a,b,c) \text{ simplify } \rightarrow a\cdot b \qquad 7.4\cdot\frac{5}{37}=1$$

Жооп: 1.

«assume» (кабыл алуу) кнопкасы төмөнкү шаблонду чакырат:

$$\blacksquare \text{ assume}, \blacksquare \rightarrow .$$

Бул шаблондун жардамында абсолюттук чоңдуктар эсептелет. Солдогу тик бурчтукка модул ичиндеги туюнтма, ал эми оң жактагы тик бурчтукка өзгөрүлмө шарт кийирилет. Мисалы,

$$2\cdot x+|x-1| \text{ assume}, x\geq 1 \rightarrow 3\cdot x-1$$

$$2\cdot x+|x-1| \text{ assume}, x<1 \rightarrow x+1 .$$

Барабарсыздык белгилери $<\leq$ кнопкасынын жардамында кийрилет. Дайыма туура шаблонду чакыруу үчүн алгач туюнтманы кийирип, аны бөлүп алып, анан керектүү кнопкага мышты басуу максатка ылайыктуу болот.

«assume», «simplify» кнопкаларына мышты удаалаш бассак

$$\blacksquare \left| \begin{array}{l} \text{assume}, \blacksquare \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow$$

шаблону пайда болот. **«assume»** кнопкасын баскандан кийин пайда болгон шаблонду толук «көк тик бурчка» бөлүп алып, анан **«simplify»** кнопкасын бассак, шаблон $\blacksquare \text{ assume}, \blacksquare \rightarrow \text{ simplify} \rightarrow$ көрүнүшүндө пайда болот. Мында алгач модул ачылып, анан жөнөкөйлөтүү ишке ашырылат.

Мисал 1.3.3. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

$$\frac{a^2-4-|a-2|}{a^3+2\cdot a^2-5\cdot a-6} .$$

Чыгаруу.

$$y(a) := \frac{a^2 - 4 - |a-2|}{a^3 + 2\cdot a^2 - 5\cdot a - 6}$$

$$y(a)\ \begin{vmatrix} \text{assume}, a > 2 \\ \text{simplify} \end{vmatrix} \to \frac{1}{(a+3)} \qquad y(a)\ \begin{vmatrix} \text{assume}, a < 2 \\ \text{simplify} \end{vmatrix} \to \frac{1}{(a+1)}$$

Эми «**solve**» (чечүү) кнопкасынын жардамында $\blacksquare\ \text{solve}, \blacksquare \to$ шаблону чакырабыз. Бул команданын жардамында төмөнкү туюнтманын(бөлчөктүн бөлүмү) мааниси нөлгө айланган чекиттерди аныктап, аларды чечимдерден чыгарып салабыз.

$$a^3 + 2\,a^2 - 5\cdot a - 6 = 0\ \text{solve}, a \ \to \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Жооп: $\frac{1}{a+3}$, $a > 2$; $\frac{1}{a+1}$, $a < 2$, $a \neq -3$, $a \neq -1$.

«**substitute**»(ордуна коюу) кнопкасына мыштын сол кнопкасын бир жолу басып, өзгөрмөнү алмаштыруучу шаблонду чакырабыз.

$$\blacksquare\ \text{substitute}, \blacksquare = \blacksquare\ \to.$$

Барабардык белгисинин сол жагына эски өзгөрмөлүү функция, ал эми оң жагына жаңы өзгөрмөлүү функция жазылат. Мисалы,

$$x^{1.5} + x^{0.5} - 1\ \text{substitute}, x = t^2 \ \to \left(t^2\right)^{1.5} + \left(t^2\right)^{.5} - 1$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 + \sqrt{x} - 1\ \text{substitute}, \sqrt{x} = t \ \to x + t - 1$$

$$\left(3^x\right)^2 + 3^x + 5\ \text{substitute}, 3^x = t \ \to t^2 + t + 5.$$

Мисалдардан көрүнгөндөй ордуна коюу формалдуу жүргүзүлөт. Эреже боюнча мында (11) панелдин башка операторлорун колдонуу зарыл. Операторлордун удаалаштыгын бир блокто колдонуу максатка ылайыктуу болот.

Мисал 1.3.4. Туюнтманы жөнөкөйлөткүлө:

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x\cdot\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}\cdot\left(x^2 - \sqrt{x}\right).$$

Чыгаруу. «simplife» операторунун жардамында туюнтма толук жөнөкөйлөбөйт. Ошондуктан төмөнкүчө чечебиз:

$$y(x) := \frac{\sqrt{x}+1}{x\cdot\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}\cdot\left(x^2 - \sqrt{x}\right)$$

$$y(x)\ \begin{vmatrix} \text{substitute}, x = t^2 \\ \text{assume}, t > 0 \\ \text{simplify} \\ \text{expand}, t \end{vmatrix} \to t^2 - 1\ \text{substitute}, t = x^{\frac{1}{2}} \ \to x - 1$$

ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
БИБЛИОТЕКА
ИНВ.№ 944219

Жооп: $x-1,\ x>0$

Бул мисалды чечүүдө «expand» командасы колдонулду. Анын шаблону $\blacksquare\ \text{expand}, \blacksquare \rightarrow$ көрүнүшүндө болот. Бул команданын жардамында бир нече амалдарды аткарабыз:

$$(x-1)\cdot(2\cdot x+5)\ \text{expand}, x \rightarrow 2\cdot x^2+3\cdot x-5$$

$$(t-1)\cdot(t+1)\ \left|\begin{array}{l}\text{expand}, t\\ \text{substitute}, t=\sqrt{x}\end{array}\right. \rightarrow x-1$$

$\left(x^3\right)^{\frac{1}{9}}$ туюнтмасын жөнөкөйлөтүүгө көңүл бурсак, $\blacksquare\ \text{series}, \blacksquare, \blacksquare \rightarrow$ шаблону рационалдык даражалар катышкан туюнтмаларды гана эффективдүү жөнөкөйлөтө тургандыгын байкайбыз.

$$\left(x^3\right)^{\frac{1}{9}}\ \text{simplify} \rightarrow \left(x^3\right)^{\frac{1}{9}} \qquad \left(x^3\right)^{\frac{1}{9}}\ \text{factor} \rightarrow \left(x^3\right)^{\frac{1}{9}}$$

$$\left(x^3\right)^{\frac{1}{9}}\ \text{expand}, x \rightarrow \left(x^3\right)^{\frac{1}{9}} \qquad \left(x^3\right)^{\frac{1}{9}}\ \text{collect}, x \rightarrow \left(x^3\right)^{\frac{1}{9}},$$

$$\left(x^3\right)^{\frac{1}{9}}\ \text{series}, x \rightarrow x^{\frac{1}{3}}.$$

Мисал 1.3.5. Жөнөкөйлөткүлө:

$$\frac{a^{\frac{7}{3}}-2\cdot a^{\frac{5}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}+a\cdot b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}-a\cdot b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\cdot b}\cdot\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$$

Чыгаруу.

$$\frac{a^{\frac{7}{3}}-2\cdot a^{\frac{5}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}+a\cdot b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}-a\cdot b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\cdot b}\cdot\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}\ \left|\begin{array}{l}\text{series}, a\\ \text{series}, b\end{array}\right. \rightarrow b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}.$$

Жооп: $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$.

Мисал 1.3.6. Жөнөкөйлөткүлө:

$$a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\left(a^{2}\cdot b\cdot\sqrt{b} - 6\cdot a^{\frac{5}{3}}\cdot b^{\frac{5}{4}} + 12\cdot a\cdot b\cdot a^{\frac{1}{3}} - 8\cdot a\cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}}{a\cdot b\cdot a^{\frac{1}{3}} - 4\cdot a\cdot b^{\frac{3}{4}} + 4\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}.$$

Чыгаруу.

$$\frac{\left(a^{2}\cdot b\cdot\sqrt{b} - 6\cdot a^{\frac{5}{3}}\cdot b^{\frac{5}{4}} + 12\cdot a\cdot b\cdot a^{\frac{1}{3}} - 8\cdot a\cdot b^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}}{a\cdot b\cdot a^{\frac{1}{3}} - 4\cdot a\cdot b^{\frac{3}{4}} + 4\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}} \left|\begin{matrix}\text{series}, a\\ \text{series}, b\end{matrix}\right. \rightarrow \frac{1}{4}\cdot(-8)^{\frac{2}{3}}$$

Жооп: 1.

«Factor»(көбөйтүүчүлөргө ажыратуу) кнопкасына мышты басып, ▪ factor → шаблонун чакырабыз. Шаблондогу ашыкча толтуруу позициялары кадимки жолдор менен өчүрүлөт.

Мисалы шаблонду $x^{2} + x - 2 \text{ factor } \rightarrow (x+2)\cdot(x-1)$ деп толтуруп, тиешелүү жыйынтык алабыз.

«parfrac» кнопкасы жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратуучу шаблонду чакырат. Мисалы,

$$\frac{1}{x^{2} + x - 2} \text{ convert}, \text{parfrac}, x \rightarrow \frac{-1}{3\cdot(x+2)} + \frac{1}{3\cdot(x-1)}.$$

§4. Теңдемелер жана теңдемелердин системалары

«solve» операторунун жардамында бир жолчонун жардамында алгебралык гана эмес, иррационалдык, көрсөткүчтүү жана логарифмдик теңдемелер чыгарылат, ошондой эле ушундай теңдемелердин системаларын да чечүүгө болот.

Мисал 1.4.1. Иррационалдык теңдемени чыгаргыла:

$$\sqrt{3\cdot x + 4} + \sqrt{x - 4} = 2\sqrt{x}.$$

Чыгаруу. Барактын талаасына **«solve»** командасынын шаблонун ачабыз. Сол жактагы белгиленген позицияга теңдемени кийиребиз(=белгиси ««Ctrl»+«=»» аркылуу кийрилет), ал эми оң жагына x белгисиз өзгөрмөсүн жазабыз. Андан кийин талаанын сырткы бөлүгүнө мышты бир жолу бассак төмөнкүдөй жыйынтык алынат:

$$\sqrt{3\cdot x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}\text{ solve},x\ \rightarrow\begin{pmatrix}4\\ \frac{-4}{3}\end{pmatrix}$$

Алынган чечимдерден $x=-\frac{4}{3}$ мааниси теңдемени канааттандырбай тургандыгы көрүнүп турат.

Жооп: x=4.

Мисал 1.4.2. Көрсөткүчтүү теңдемени чыгаргыла:

$$8^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{3\cdot x+3}{x}}+12=0$$

Чыгаруу.

$$8^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{3\cdot x+3}{x}}+12=0\text{ solve},x\ \rightarrow 3.000000000($$

Жооп: x=3.

Мисал 1.4.3. Логарифмдик теңдемени чыгаргыла:

$$x^{\lg(x)}=1000x^2$$

Чыгаруу.

$$x^{\log(x)}=1000\cdot x^2\text{ solve},x\ \rightarrow\begin{bmatrix}\exp\left[\ln(10)+\left(\ln(10)^2+\ln(1000)\cdot\ln(10)\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\ \exp\left[\ln(10)-\left(\ln(10)^2+\ln(1000)\cdot\ln(10)\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{bmatrix}$$

Жоопту жөнөкөйлөтүү үчүн, «simplify» операторун кошумча колдонобуз. Алынган эсептөөлөрдүн астын көк бурч сызык менен сызып, мышты simplify кнопкасына басабыз. Анда эсептөө фрагменти

$$x^{\log(x)}=1000\cdot x^2\text{ solve},x\rightarrow\ \text{simplify}\rightarrow$$

көрүнүшүнө ээ болуп, блоктун сыртына мышты бир жолу бассак төмөнкүдөй жыйынтык алынат:

$$x^{\log(x)}=1000x^2\text{ solve},x\ \rightarrow\begin{bmatrix}\exp\left[\ln(10)+\left(\ln(10)^2+\ln(1000)\cdot\ln(10)\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\ \exp\left[\ln(10)-\left(\ln(10)^2+\ln(1000)\cdot\ln(10)\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{bmatrix}\text{simplify}\rightarrow\begin{pmatrix}1000\\ \frac{1}{10}\end{pmatrix}$$

Жооп: $\{0.1;\ 1000\}$.

Мисал 1.4.4. Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases}2^{\frac{x+y}{3}}+2^{\frac{x+y}{6}}=6\\ x^2+5y^2=6xy.\end{cases}$$

Чыгаруу. Жумушчу барактын талаасына **«solve»** шаблонун чакырабыз. Шаблондун сол белгиленген позициясына 2x1 өлчөмдөгү матрицанын шаблонун коебуз да (матрицалык операциялар панелиндеги «матрицаны коюу» кнопкасына мышты басып, 2 жолчо, 1 мамыча деп талаалар толтурулат) матрицанын шаблонундагы позициядан баштап теңдемелерди кийиребиз. «**Solve**» шаблонунун оң жак белгиленген позициясына 2x1 өлчөмдөгү матрицанын шаблонун коюп, x, y белгисиздерин кийиребиз. Анан кийирүү талаасынын сырткы бөлүгүнө мышты бир жолу бассак, чечимдердин матрицасы пайда болот:

$$\left(\begin{pmatrix} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6 \\ x^2 + 5\cdot y^2 = 6\cdot x\cdot y \end{pmatrix}\right) \text{solve}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3\cdot\frac{\ln(-3)}{\ln(2)} & 3\cdot\frac{\ln(-3)}{\ln(2)} \\ 5\cdot\frac{\ln(-3)}{\ln(2)} & \frac{\ln(-3)}{\ln(2)} \\ 5 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Мында биринчи эки чечимди жооптордун катарынан алып салабыз. Себеби терс сандардын логарифмдери – комплекстик сандар болушат.
Жооп: $\{(5;1),(3;3)\}$.

Мисал 1.4.5. k санынын кандай бүтүн маанилеринде $4x^2-(3k+2)x+k^2-1=0$ теңдемесинин чечимдеринин бирөөсү экинчисинен үчкө аз болот:
Чыгаруу. Теңдеменин чечимдерин табабыз:

$$4\cdot x^2-(3\cdot k+2)\cdot x+k^2-1=0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{8}\cdot k+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\left(-7\cdot k^2+12\cdot k+20\right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{3}{8}\cdot k+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\cdot\left(-7\cdot k^2+12\cdot k+20\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Чечимдерди кезек менен копиялап, тийиндиси үчкө барабарланган, теңдемени **solve** операторунун шаблонуна коюп чечебиз:

$$\left[\frac{\frac{3}{8}\cdot k+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdot\left(-7\cdot k^2+12\cdot k+20\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{8}\cdot k+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\cdot\left(-7\cdot k^2+12\cdot k+20\right)^{\frac{1}{2}}}\right] = 3 \text{ solve}, k \rightarrow 2.$$

Жооп: $k=2$.

MathCAD системасында теңдемелерди жана теңдемелердин системаларын «**Given**»(берилди), «**Find**»(издөө) кызматчы сөздөрүн колдонуп да чечүүгө болот. Клавиатурадан «**Given**» сөзүн терип, анан теңдемени же теңдемелердин системасын кийиребиз. Мында барабардык белгисин <<Ctrl>+ < =>>(теңдеш барабар) көрүнүшүндө кийирүү зарыл. Андан кийин $\text{Find}(x,y)\rightarrow$ сөзүн кийирип, (11) панелдеги → кнопкасын басабыз. Эсептөөлөрдүн жыйынтыгы акыркы блоктун сырткы бөлүгүнө мышты басканда пайда болот. Блоктордун ушундай удаалаштыгы **«Given-Find»** эсептөө блогу деп аталат.

Мисал 1.4.6. Теңдемелердин системасын чыгаргыла:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + 13, \\ x + y = \sqrt{xy + 3}. \end{cases}$$

Чыгаруу.

Given

$$x^2 + y^2 = x \cdot y + 13$$

$$x + y = \sqrt{x \cdot y} + 3$$

$$\mathrm{Find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 - \sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2 + \sqrt{3} & 2 - \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$$

Жооп: $\{(4;1), (1;4), (2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}), (2+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3})\}$.

Мисал 1.4.7. a нын кандай маанилеринде $x^2 + ax + 8 = 0$ жана $x^2 + x + a = 0$ теңдемелери жалпы чечимге ээ?

Чыгаруу. Чыгаруу төмөнкү системаны чечүүгө келтирилет:

$$\begin{cases} x^2 + ax + 8 = 0, \\ x^2 + x + a = 0. \end{cases}$$

«Given-Find» эсептөө блогун пайдаланып чечебиз.

Given

$$x^2 + a \cdot x + 8 = 0$$

$$x^2 + x + a = 0$$

$$\mathrm{Find}(x, a) \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 + i \cdot \sqrt{3} & -1 - i \cdot \sqrt{3} \\ -6 & -2 \cdot i \cdot \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3} & 2 \cdot i \cdot \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Жооп: $a = -6$.

§5. Барабарсыздыктар

MathCADдын каражаттары көпчүлүк барабарсыздыктарды ийгиликтүү чечүү мүмкүнчүлүгүн берет. Бул мүмкүнчүлүктөрдү мисалдарда карап көрөлү.

Мисал 1.5.1. Функциянын аныкталуу аймагын тапкыла:

$$y := \sqrt{\frac{x^2 - 7 \cdot x + 12}{x^2 - 2 \cdot x - 3}}.$$

Чыгаруу. Аныкталуу аймагы төмөнкү барабарсыздык менен берилет:

$$\frac{x^2 - 7 \cdot x + 12}{x^2 - 2 \cdot x - 3} \geq 0.$$

«**Solve**» шаблонун толтуруп, кийинки жыйынтыкты алабыз:

$$\frac{x^2 - 7\cdot x + 12}{x^2 - 2\cdot x - 3} \geq 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} x < -1 \\ 4 \leq x \end{pmatrix}$$

Жооп: $x \in (-\infty;-1) \cup [4;+\infty)$.

Мисал 1.5.2. Көрсөткүчтүү барабарсыздыкты чечкиле.

$$25^x < 6\cdot 5^x - 5$$

Чыгаруу. Барабарсыздыкты $5^x = t$ ордуна коюсунун жардамында квадраттык барабарсыздыкка келтиребиз. Ошондуктан чечимди издөөнү ордуна коюдан баштайбыз:

$$\left(5^x\right)^2 < 6\cdot 5^x - 5 \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, 5^x = t \\ \text{solve}, t \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} t < 5 \\ 1 < t \end{pmatrix},$$

Эми жөнөкөй көрсөткүчтүү барабарсыздыктардын чечимдерин табабыз:

$$1 < 5^x \text{ solve}, x \rightarrow 0 < x$$

$$5^x < 5 \text{ solve}, x \rightarrow x < 1$$

Жооп: $x \in (0;1)$.

Мисал 1.5.3. Логарифмдик барабарсыздыкты чечкиле

$$\log^2_{0.5}(x) + \log_{0.5}(x) - 2 \leq 0.$$

Чыгаруу.

MathCAD системасында логарифмдик функциялар

Математикалык жазылышы	MathCADда жазылышы
$\log_a x$	$\log(x,a)$
$\lg x$	$\log(x)$
$\ln x$	$\ln(x)$

таблицадагыдай жазылат. Биз функцияны ондук логарифмге өткөрүп алып кийирип барабарсыздыкты чечебиз. Алгач,

$$\left(\frac{\log(x)}{\log(0.5)}\right)^2 + \frac{\log(x)}{\log(0.5)} - 2 \leq 0 \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, \frac{\log(x)}{\log(0.5)} = t \\ \text{solve}, t \end{array} \right. \rightarrow t \leq -2.0813689810056077980\ln(x)^2 + 2.$$

Эми жогорку мисалдагыдай эле

$$\frac{\log(x)}{\log(0.5)} \leq -2 solve, x \rightarrow 3.9 \leq x$$

алабыз.

Жооп: $x \in [3.9;\infty)$.

Мисал 1.5.4. Логарифмдик барабарсыздыкты чечкиле:

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1.$$

Чыгаруу. Программа өзү чечимди эки учурга бөлөт:

$$\frac{\log\left(x^2-5\cdot x+6\right)}{\log(2\cdot x)} < 1 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} x < \frac{1}{2} \\ (1 < x)\cdot(x < 6) \end{bmatrix},$$

Алынган жыйынтык менен логарифмдин касиеттерине ылайык шарттардын кесилишин карайбыз.

$$x^2 - 5\cdot x + 6 > 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} x < 2 \\ 3 < x \end{pmatrix}$$

$$x > 0, x \neq 0.5$$

Жооп: $x \in (0;\frac{1}{2}) \cup (1;2) \cup (3;6)$.

Өз алдынча иштөө үчүн мисалдар.

1. Эсептегиле.

a). $$\frac{(1+\frac{m}{12}-\frac{n}{18}+\frac{4\cdot n-6\cdot m}{72})\cdot 4+12\cdot n\cdot(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}\cdot\frac{2}{5})}{2.2+0.8\cdot(5+\frac{1}{2}-3.25)+n};$$

b). $$\frac{\frac{-7-\frac{m}{5}-\frac{n}{12}+\frac{4\cdot m-5\cdot n}{60}}{0.5}+n\cdot(\frac{7}{5}+3.5\cdot 0.8)+\frac{4}{15}\cdot m+10}{(2.4\cdot 1.3+1.88)\cdot(n\cdot 0.84-0.8)}.$$

2. Пропорциядан x ти тапкыла:

a). $$\frac{[\frac{\frac{4}{5}+(m+n)\cdot\frac{3}{5}-\frac{m+n}{40}}{24}-\frac{m+n}{40}]\cdot(8+\frac{7}{16})}{(\frac{1}{n}-\frac{8-n}{8\cdot n})\cdot x}=\frac{(0.675\cdot 2.4-0.02)\cdot\frac{5}{8}}{(1+\frac{28}{63}-\frac{17}{21})\cdot 0.7};$$

b) $$\frac{\frac{42+5\cdot n-7\cdot m}{10}-3.5\cdot(1+\frac{n}{7}-\frac{m}{5})}{0.16\cdot x}=\frac{(3+\frac{2}{7}-\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{6})\cdot\frac{8}{13}}{1+\frac{23}{84}-\frac{49}{60}}.$$

3. Жөнөкөйлөткүлө:

a) $$\left[\frac{(n\cdot x)^3+(m\cdot y)^3}{(n\cdot x)^2-(m\cdot y)^2}-\frac{1}{(m\cdot y)^{-1}-(n\cdot x)^{-1}}\right]\times(n\cdot x-m\cdot y)^{-1}+\frac{x^2-2\cdot m\cdot x+m^2-n^2}{x-m-n};$$

b) $$\left[\frac{(n\cdot x)^3+(m\cdot y)^3}{(n\cdot x)^2-(m\cdot y)^2}+\frac{1}{(m\cdot y)^{-1}-(n\cdot x)^{-1}}\right]\times(n\cdot x-m\cdot y)^{-1}+\frac{x^2-2\cdot m\cdot x+m^2-n^2}{x-m+n}.$$

4. Алгебралык теңдемелерди чечкиле:

a) $nx^2+|x+m|-m-n-1=0$; b) $\frac{2m}{x^2-1}=\frac{n}{m-nx}(\frac{m}{x-1}-n)$.

5. Иррационалдык теңдемелерди чечкиле:

a) $\sqrt{m+n}-\sqrt{n+x}=\sqrt{m-x}$; b) $x^2+mx+n\sqrt{x^2+mx+m^2}-mn=0$,.

6. Теңдемелердин системаларын чечкиле:

a) $\begin{cases} nx + y + \dfrac{mx}{y} = 9 \\ \dfrac{(nx+y)mx}{y} = 20 \end{cases}$; b) $\begin{cases} n(x+y) - (m+1)(x-y) = nm \\ x^2 - y^2 = n \end{cases}$.

7. Жөнөкөй бөлчөктөргө ажыраткыла:

a) $\dfrac{mx+n}{(x-1)(x^2+mx+m^2)}$; b) $\dfrac{nx-m}{(x^2+m)(x^2+m+n)}$.

8. Логарифмдик теңдемелерди чечкиле:

a) $\lg x + \lg(x+n-m+5) = \lg n + \lg(m+5)$; b) $2\lg_{25} x - mn\lg_x 5 + (n-m) = 0$;

c) $x^{\lg x - 1} = 10^{-(m+n)(1-m-n)}$; d) $x^{n+\lg x} = 10^{m(m+n)}$.

9. Көрсөткүчтүү теңдемелерди чечкиле:

a) $\dfrac{9^{x^2}3^x}{(9^{\frac{x}{n}})^m} = 3^{\frac{m}{n}}$; b) $4^{x^2}(4^{\frac{x}{n}})^m = 2^x 2^{\frac{m}{n}}$;

c) $(m+1)^{2x} + (\frac{1}{2} - \frac{m+1}{n+1})(m+1)^x(m+n+1)^x - \frac{m+1}{2(n+1)}(m+n+1)^{2x} = 0$.

10. Барабарсыздыктарды чечкиле:

a) $\dfrac{m+n}{x+m} \le \dfrac{n}{x-m}$; b) $\dfrac{m+n}{x-m} < \dfrac{1}{x+mn}$;

c) $x - (m-n)\sqrt{x} - mn > 0$; d) $\sqrt{x^2+mx} > x - n$.

11. Модулдар камтылган барабарсыздыктарды чечкиле:

a) $|x+m| \le (n+1)x$; b) $nx^2 + |m-x| - m - n - 1 = 0$.

8. Логарифмдик барабарсыздыктарды чечкиле:

a) $\log_{(m+5)n} x + 2\log_{(m+5)n}\sqrt{x+n-m-5} < 1$; b) $\log_3 x + \dfrac{mn}{2}\log_{\sqrt{x}} 3 - (m+n) > 0$;

c) $\log_{m(x+n)}(x^2+nx) > 1$.

Глава II. **Геометриялык түзүүлөр**
§1. Ийри сызыктарды түзүү

кнопкасына мышты басып MathCADдын графикалык редакторун активдештирип, геометриялык түзүүлөрдүн менюсун ачабыз:

(12)

Активдүү эмес кнопкалар биринчи кнапканын жардамында график тургузулуп көк бурч менен бөлүнгөндө гана активдүү болушат. Төмөндө панелдеги кнопкалардын аталыштарын тиешелүү түрдө көрсөтөбүз.

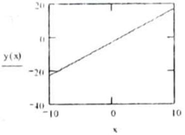
X-Y Plot (Декартык координаталарда графиктер)	X-Y Zoom (Микроскоп)	Trace(из)
Polar Plot (Полярдык координаталарда графиктер)	Surface Plot (Декарттык координаталарда беттер)	Contour Plot (Декарттык координаталарда деңгээл сызыктар)
3D Bar Chart (Гистораммалар)	3D Scatter Plot (Декарттык координаталарда R^3 чекиттер)	Vector Field Plot (тегиздикте вектордук талаа)

X-Y Plot талаасында функциянын графигин түзүү тартибин төмөнкү мисалда карайлы.

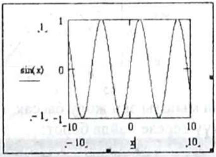
Мисал 2.1.1. $y = 2x - 3$ функциясынын графиги тургузулсун.

Чыгаруу.

1. Баракка клавиатурадан $y(x) := 2x - 3$ кийрилет.
2. Мыштын көрсөткүчүнүн жардамында графикти түзүү талаасынын сол жогорку бурчу белгиленип, сол кнопка басылат.
3. (12) деги биринчи кнопкага мышты басып(<shift>+<2>) X-Y Plot график түзүү талаасын ачабыз. Мында толтуруу үчүн эки позиция көрсөтүлгөн. Сырткы рамкадагы маркерлердин жардамында түзүү талаасынын размери өзгөртүлөт.
4. Горизонталдык ок боюнча белгиленген позицияга клавиатурадан «x» кийрилет.
5. Курсорду вертикалдык ок боюнча белгиленген позицияга которобуз.
6. $y(x)$ ти кийиребиз.
7. Рамканын сыртына мышты бассак, рамканын ичинде пайда болот.

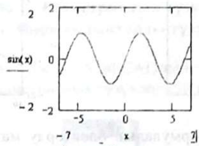


Графикалык жана формулалык блокторду математикалык областтар деп аташат. Б.а. булардын кайсы бирине каалагандай өзгөртүү кийирсек, ал кийинки математикалык областтарда чагылдырылат. Мисалы мыштын көрсөткүчүнүн жардамында 2 коэффициентинин ордуна башка маани кийирсек, анда X-Y Plot талаасында жаңы бурчтук коэффициенттүү функциянын графиги тургузулат. Функциянын графигин алдын ала аныктабастан да түзүүгө болот. Б.а. горизонталдык ок боюнча белгиге $y(x)$ тин ордуна функциянын өзүн кийирсек болот. Мисалы,



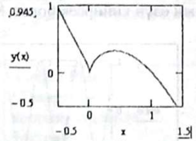
Мында астында «мурутчалар» бар төрт сан негизги мааниге ээ. Бул сандардын жардамында x жана $\sin(x)$ тин маанилеринин диапазондорунун чек аралары аныкталат. x жана $\sin(x)$ тердин өзгөрүү аралыктарын тиешелүү түрдө $[a;b]$ жана $[c;d]$ дейли. Анда $[a;b]$ жана $[c;d]$ аралыктарын өзгөртүү төмөнкүдөй аракеттердин жардамында өзгөртүлөт:

1. Графиктин талаасына мышты бассак, графикти редактирлөө мүмкүнчүлүгүн алабыз.
2. Төмөн жагында «мурутча» бар сандардын бирөөсүнө мыштын көрсөткүчүн койсок, ал сан көк бурчча менен бөлүнөт.
3. <Backspace> клавишасынын жардамында сан өчүрүлүп, клавиатурадан башка сан кийрилет.
4. Ушул эле сыяктуу башка сандарды да өзгөртөбүз.
5. Мыштын көрсөткүчүн түзүү талаасынын сырткы бөлүгүнө бир жолу бассак, жаңы чек арага ээ графикти алабыз.



Чек араларды, өзгөрмөлөрдү кийирүү боюнча көндүмдөр пайда болгондон кийин каалаган татаалдыктагы функциялардын графиктерин тургуза алабыз. Мисалы,

$$y(x) := \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (1 - x)$$



Графиктин талаасына мышты эки жолу бассак, графиктин параметрлерин өзгөртүү үчүн 4 беттүү терезе пайда болот:

Биринчи беттин бир бөлүгүндө сунуш кылынган үч учурдун бирөөсүн орнотууга болот: «Ограниченная область»(чектелген аймак) – график тик бурчтуу аймакта пайда болот, «Пересечение»(кесилиш) – график координата октору менен кошо пайда болот, «Без границ»(чек арасыз) – график гана чыгат. Экинчи бетке өтүү үчүн «Трассировка» бөркүнө мыштын көрсөткүчүн жылдырып барып мыштын сол кнопкасын басабыз:

Бул терезе ийрилерди форматтоонун параметрлерин алып жүрөт:

- «Лэйба» (Легенданын аты) – trace 1.
- «Символ». Бул мамычада чекиттерди сүрөттөө үчүн ×, + ж.б. символдору тандалат.
- «Строк»(Жолчо) – Сызыктын тиби орнотулат: solid(жалпы), dash(үзгүлтүк), dot(чекиттүү), dadot(штрихүзгүлтүк).

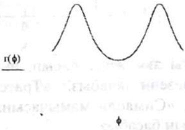
Бул параметрлер «Тип» мамычасында lines элементи турган учурда гана активдүү болот.

- «Цвет» (Түс) – Сызыктын түсүн аныктайт.
- «Тип»(Тиби) – Сүрөттөлүштөрдүн сунушталган жетөөсүнүн бири тандалат: lines(сызык), bar(П көрүнүшүндөгү мамыча), error(эки графиктин айырмасы алынат) ж.б.
- «Вес» – сызыктын жоондугу тандалат(алгач жоондук 1 деп сунушталат).

«Метки» бөркүнүн жардамында графиктин аталышын жана октордогу жазууну өзгөртүүгө болот.

(r,φ) полярдык координаталарда да графиктер жогоркудай эле тургузулат. Мисалы,

$$r(\phi) := \frac{1}{1 + 0.5\cos(5\cdot\phi)}$$



Мисал 2.1.2. $y = x\sin x$ функциясынын маанилеринин таблицасы [-5;5] аралыгында 0,5 кадамы менен түзүлүп, $(x_i;y_i)$ чекиттери тургузулсун.

Чыгаруу. Барактын талаасына

$$y(x) := x\cdot\sin(x) \qquad N := 20 \qquad i := 0..N \qquad x_i := -5 + i\cdot 0.5 \qquad y_i := y(x_i)$$

туюнтмаларын кийиребиз. Анан <y> <=> символдорун кийирсек маанилердин таблицасы пайда болот:

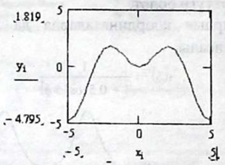
y =

	0
0	-4.795
1	-4.399
2	-3.027
3	-1.228
4	0.423
5	1.496
6	1.819
7	1.496
8	0.841
9	0.24
10	0
11	0.24
12	0.841
13	1.496
14	1.819
15	1.496

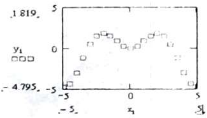
y =

	0
0	-4.795
1	-4.399
2	-3.027
3	-1.228
4	0.423
5	1.496
6	1.819
7	1.496
8	0.841
9	0.24
10	0
11	0.24
12	0.841
13	1.496
14	1.819
15	1.496

Таблицага мышты бир жолу бассак, түрүү тилкеси пайда болот. Анын жардамында көрүнбөй калган маанилерди кароо мүмкүнчүлүгүн алабыз. Рамканын сырткы бөлүгүнө мышты басып, чекиттердин графигин тургузабыз. Б.а. X-Y Plot талаасын ачып, белгиленген позицияларды толтурсак, төмөнкү графикти алабыз:



Графикке мышты эки жолу басып, анын параметрлерин өзгөртүү үчүн диалогдук терезени ачабыз. «Трассировка» бетиндеги «Тип» мамычасына «points», «Символ» мамычасына «box» режимдерин коюп «Применить» кнопкасын басабыз:



§2. Беттерди тургузуу

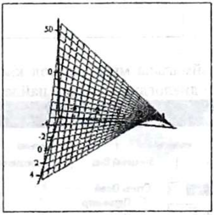
MathCADда беттерди тургузуу жалпак ийрилерди тургузууга караганда жөнөкөй жолдор менен ишке ашат десек да болот. Жумушчу баракка

$$z(x,y) := f(x,y),$$

кийиребиз, мында $f(x,y)$ бетти аныктоочу аналитикалык туюнтма. (12) панелдин кнопкасына мышты басып, түзүү талаасын ачабыз да <z> клавишасын басабыз. Анан түзүү талаасынын сырткы бөлүгүнө мышты бассак, беттин сүрөттөлүшү пайда болот.

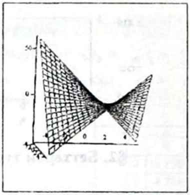
Мисал 2.2.1 Гиперболалык параболоидди тургузгула:

$$z(x,y) := 2\cdot x\cdot y - x - y + 1$$

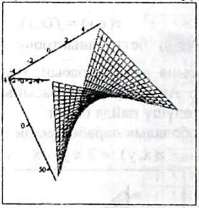


Беттин аймагына мышты бассак, анын размерин өзгөртүү мүмкүнчүлүгү пайда болот. Мисалы, эгерде сфера тургузсак, масштабдын автоматтык түрдө тандалуусунан эллипсоид пайда болуп калышы мүмкүн. Мындай учурда тиешелүү кнопкалардын жардамында өзгөртүп алууга болот. Контексттик менюнун жардамында, сүрөттөлүштүн сыртындагы рамканы алып салууга болот.

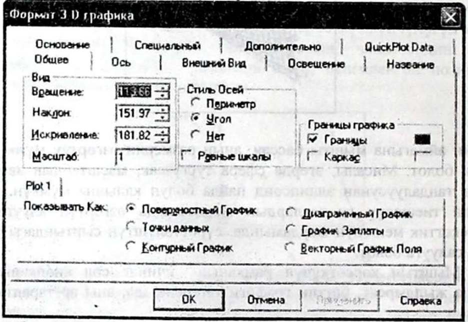
Мыштын көрсөткүчүн рамканын ичинде сол кнопканы баскан абалда жылдырсак, беттин графиги тегеренет да, аны ар тараптан көрүү мүмкүн:



Бул көрүнүштү тескерисинен да жайгаштырууга болот



Бетти тургузуу аймагына мыштын сол кнопкасын эки жолу бассак, «Формат 3-D графика» диалогдук терезеси пайда болот:



Мында беттин параметрлерин ар түрдүү өзгөртүүгө болот. «Внешний вид» бөркүн ачып, «Залить поверхность» , «палитра» режимдерин орнотсок, сүрөттөлүш түстүү болот.

Параметрдик түрдө берилген беттер, белгиленген позицияга (x,y,z) символдорун кийирүү менен тургузулат.

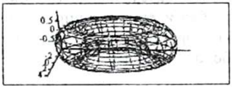
Мисал 2.2.2 $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$

$$a := 3 \qquad b := 1$$

$$x(u,v) := (a + b\cdot\cos(u))\cdot\cos(v)$$

$$y(u,v) := (a + b\cdot\cos(u))\cdot\sin(v)$$

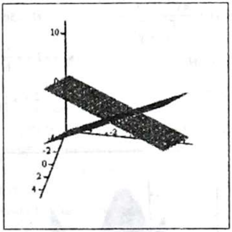
$$z(u,v) := b\cdot\sin(u)$$



(x, y, z)

Түзүү талаасындагы белгиленген позицияга эки функцияны тең арасын үтүр менен ажыратып кийирсек, бир учурда эки бет тургузулат.

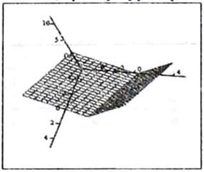
Мисал 2.2.3 $z(x,y) := 1 + x + y$ жана $u(x,y) := 2 + x - y$ тегиздиктердин кесилишин түзгүлө.



z, u

$$z(x,y) := \begin{vmatrix} (1 + x + y) & \text{if } (1 + x + y) \ge 2 + x - y \\ 2 + x - y & \text{if } 1 + x + y < 2 + x - y \end{vmatrix}$$

функциясы тегиздиктердин кесилишинен пайда болгон эки гранду бурчтардын бирөөсүн аныктайт:



z

MathCADда беттерди тургузуу үчүн өзгөрмөлөрдүн өзгөрүү аралыктарын

$$a \le x \le b,\ c \le y \le d\,, \tag{13}$$

жана N кадамдардын санын аныктап алабыз. Барактын талаасына

$$\begin{aligned} &z(x,y) := f(x,y) \quad N := [\textit{значение}] \\ &i := 0..N \quad x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{N} \\ &j := 0..N \quad y_j := c + j \cdot \frac{d-c}{N} \\ &z_{i,j} := f(x_i, y_j) \end{aligned} \tag{14}$$

кнопкасына мышты басып, пайда болгон үч өлчөмдүү координата системасындагы белгиленген позицияга <z> символун кийиребиз.

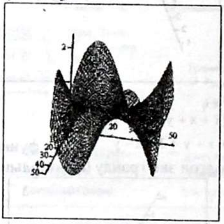
Кийирүү рамкасынын сырткы бөлүгүнө мышты бир жолу бассак, беттин сүрөттөлүшү пайда болот. Мисалы,

$$z = \frac{xy(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

теңдемеси менен берилген бетти тургузалы.

Мейли $x \in [-2, 2],\ y \in [-2, 2],\ N = 50$. (14)түн негизинде барактын талаасына төмөнкү туюнтманы кийиребиз:

$$\begin{aligned} &z(x,y) := \frac{x \cdot y \cdot (x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad N := 50 \\ &i := 0..N \qquad x_i := -2 + i \cdot \frac{4}{N} \\ &j := 0..N \qquad y_j := -2 + j \cdot \frac{4}{N} \\ &z_{i,j} := z(x_i, y_j) \end{aligned} \tag{15}$$



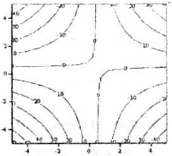
z

§3. Деңгээл сызыктары. Вектордук талаалар

MathCADда $f(x,y)=C$ деңгээл сызыктарын тургузуу үчүн барактын талаасына $z(x,y):=f(x,y)$ функциясын кийирип, кнопкасына мыштын сол кнопкасын бир жолу басабыз. Анан түзүү талаасындагы белгиленген позицияга <z> символун кийирип, анын сырткы бөлүгүнө мышты дагы бир жолу басабыз. Беттерди тургузгандай эле сызыктардын параметрлерин өзгөртүүгө болот.

Мисал 2.3.1

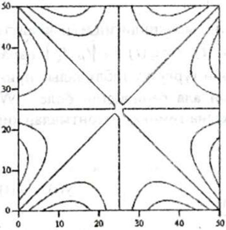
$$z(x,y) := 2\cdot x\cdot y - x - y + 1$$



x

Параметрлерди өзгөртүүчү диалогдук терезедеги <Специальный> деген беттеги <Нумерация> режимин активдештирсек, деңгээл сызыктарындагы функциялардын маанилери коюлат.

MathCADда (13) туюк областта $f(x,y)=C$ деңгээл сызыктары (14) сетканын түйүндөрүндөгү $z_{i,j}:=f(x_i,y_j)$ маанилеринин таблицасы боюнча тургузулат. Барактын талаасына (14) формулаларды кийирип, кнопкасын активдештиребиз. Пайда болгон деңгээл сызыктарын түзүү талаасындагы белгиленген позицияга <z> символун кийирип, түзүү талаасынын сырткы бөлүгүнө мыштын сол кнопкасын бир жолу бассак жыйынтык пайда болот. Барактын талаасына (15) ти кийирип, жогоркудай жол менен деңгээл сызыктарды тургузсак төмөнкү сүрөттөлүштү алабыз:



z

$\bar{a} = f(x,y)\bar{i} + \psi(x,y)\bar{j}$ вектордук талаасы (14) сетканын түйүндөрүндөгү f, ψ функцияларынын маанилеринин таблицасынын жардамында курулат. Түзүү талаасын кнопкасынын жардамында ачып, белгиленген позицияга (f, ψ) туюнтмасы толтурулат.

Мисал 2.3.2 Вектордук талаа тургузулсун:

$$\bar{a} = (x+y)\bar{i} + (x-y)\bar{j},\ x \in [-2,2],\ y \in [-2,2],\ N = 20.$$

Чыгаруу. Төмөнкү туюнтмаларды барактын талаасына кийиребиз:

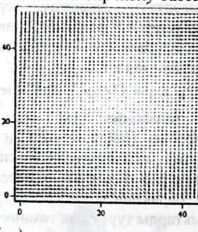
$$i := 0..N \qquad j := 0..N$$

$$x_i := -2 + i\cdot\frac{4}{N} \qquad y_j := -2 + j\cdot\frac{4}{N}$$

$$u(x,y) := x + y \qquad u_{i,j} := u(x_i, y_j)$$

$$v(x,y) := x - y \qquad v_{i,j} := v(x_i, y_j)$$

Анан кнопкасына мыштын сол кнопкасын басып, белгиленген позицияга (u, v) туюнтмасын кийиребиз да, түзүү талаасынын сырткы бөлүгүнө мыштын сол кнопкасын бир жолу бассак жыйынтык алынат:



(u,v)

кнопкасы R^3 мейкиндигиндеги чекиттерди куруу үчүн кызмат кылат. $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \zeta(t),\ t \in [t_H, t_K]$ параметрдик түрдө берилген ийрилердин чекиттерин тургузуу таблицалык принципте жүргүзүлөт:

1. Эгерде алдын ала берилбеген болсо, N дин мааниси тандалат жана барактын талаасына төмөнкү туюнтмалар кийрилет:

$N := [\mathit{значение}]$

$i := 0..N$

$$t_i := t_H + i\cdot\frac{t_K - t_H}{N} \qquad y(t) := \psi(t) \qquad y_i := y(t_i)$$

$$x(t) := \phi(t) \qquad x_i := x(t_i) \qquad z(t) := \zeta(t) \qquad z_i := z(t_i)$$

2. Акыркы жолчонун төмөн жагына же оң жагына <+>(плюс) белгиси коюлат.

3. кнопкасынын жардамында куруу талаасын ачып, белгиленген позицияга (x, y, z) туюнтмасын кийиребиз.

4. Мыштын сол кнопкасын түзүү талаасынын сырткы бөлүгүнө бир жолу басабыз.

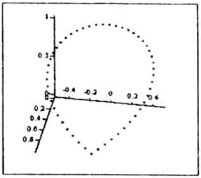
5. Түзүү талаасына мыштын сол кнопкасын эки жолу бассак, параметрлерди өзгөртүү үчүн панель ачылат.

Мисал 2.3.3 Вавиананын ийриси тургузулсун:

$$N := 50 \qquad i := 0..N \qquad t_i := i\cdot\frac{2\cdot\pi}{N}$$

$$x(t) := 0.5 + 0.5\cdot\cos(t) \qquad y(t) := 0.5\cdot\sin(t) \qquad z(t) := \sin\left(\frac{1}{2}\cdot t\right)$$

$$x_i := x(t_i) \qquad y_i := y(t_i) \qquad z_i := z(t_i)$$



(x, y, z)

Өз алдынча иштөө үчүн мисалдар.

1. Функциялардын графиктерин тургузгула:

а) $y = \left|x^2 + mx - n(m+n)\right|$, б) $y = \left|x^2 + m|x| - n(m+n)\right|$,

в) $y = \dfrac{(x-m)^3}{(x-m)^2 - n^2}$, г) $y = \exp(n\cos(x) + m\sin(x))$,

д) $y = \begin{cases} \dfrac{m}{n}(x+n), если & x \in (-\infty, 0) \\ -\dfrac{m}{n^2}(x-n^2), \quad если & x \in [0, n] \\ mx, \ если & x \in (n, \infty) \end{cases}$

2. Параметрдик түрдө берилген ийрилерди тургузгула:

а) $x = m\cos t,\ y = n\sin t,$

б) $x = m(t - \sin t),\ y = m(1 - \cos t),$

в) $x = n(\cos t + t\sin t),\ y = n(\sin t - t\cos t),$

3. Полярдык координаталарда төмөнкү теңдемелер менен берилген ийрилерди тургузгула:

а) $r = n\exp(\frac{n}{m}\varphi)$, б) $r = n\cos m\varphi$, в) $r = n(1-\cos\varphi)$.

4. Ийрилерди тургузуп, кесилишүү чекиттеринин координаталарын тапкыла:

а) $y=(x-n)^3$, $y=n^2x-n^3$,

б) $y=x^2+mx-n^2$, $(mn+n^2)x-(m+n)y+m^2n-n^3=0$,

в) $y=n(x+1)(m+n-nx), y=2m(m-nx)$.

5. Беттерди куруп, анын денгээл сызыктарын тургузгула:

а) $z=\frac{\sin\sqrt{mx^2+ny^2}}{\sqrt{mx^2+ny^2}}$,

б) $z=n\cdot\cos\frac{xy}{m}$,

в) $z=\cos(nx\cdot\exp(-\frac{y}{m}))$.

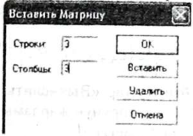
Глава III. **Жогорку математика. Программалык блоктор**

§1. Матрицалар

MathCADдын инструменттериндеги кнопкасы матрицалык операцияларды аткаруучу менюну чакырат:

(16)

Барактын талаасына матрица коюу үчүн, мышты кнопкасына басып(же <ctrl>+<M> комбинациясы) пайда болгон диалогдук терезеге жолчолордун жана мамычалардын санын кийиребиз.



(17)

ОК кнопкасына мыштын сол кнопкасын бассак, толтуруу үчүн трафарет пайда болот. (16) нын калган кнопкалары барактын талаасына тиешелүү шаблондорду коюп, аларга төмөнкү туюнтмалар кийирилет:

X_n - элементтин төмөнкү индекси,

X^{-1} - X ке тескери матрица,

$|X|$ (<|>) - X матрицасынын аныктагычы(детерминант),

$\overrightarrow{f(M)}$ (<Ctrl>+<->) - бирдей көрүнүштөгү матрицаларды компоненттик көбөйтүү,

$M^{\langle i \rangle}$ (<Ctrl>+<6>) – M матрицасынын <>мамычасынын элементтеринен түзүлгөн матрица,

M^T (<Ctrl>+<1>) – M матрицасына транспонирленген матрица,

$\overline{X} * \overline{Y}$ - векторлорду скалярдык көбөйтүү,

$\overline{X} \times \overline{Y}$ - R^3 да векторлорду вектордук көбөйтүү,

$\sum U$ - вектордун компоненттеринин суммасы,

(<Ctrl>+<T>) – Ар бир элементи «растровый» сүрөттөлүштүн бир пикселинин түстүү маанисин алып жүрүүчү матрица.

Барактын талаасына

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad (18)$$

матрицасын кийиребиз.

1. Клавиатурадан төмөнкү туюнтманы кийиребиз:

$$A := \blacksquare \qquad (19)$$

2. (17) терезени ачып, жолчолордун санына <2> , мамычалардын санына да < 2> санын кийиребиз(эгер экиден башка сан болсо).

3. <OK> же <Вставить> кнопкасына мыштын сол кнопкасын бассак (19) жолчого матрицанын трафаретин толуктайт:

$$A := \begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$$

Муну жөнөкөй эле толтуруп коебуз.

Элементтери турактуулар болгон матрицалардын үстүнөн болгон амалдардын жыйынтыктарын чыгаруу «Вычислить»(<f9>,<=>,=) командасы аркылуу аткарылат. Мисалы, <<Shift>+<I>><<Shift>+<A>><=> амалы (18) матрицанын аныктагычынын маанисин берет

$$|A| = -2 ,$$

Ал эми <<Ctrl>+<I>><<Shift>+<A>><=> амалы транспонирленген матрицаны чыгарат. Сандык матрицалар менен амалдарга дагы бир мисал келтирели:

$$\frac{1}{|A|}\cdot\left(3\cdot A + 2\cdot A^{T}\right)\cdot A^{\langle 0\rangle} = \begin{pmatrix} -20.5 \\ -36.5 \end{pmatrix} .$$

Символдук жыйынтыктар «Вычислить Символьно» (<<Shift>+f9>>) командасынын же $\blacksquare\rightarrow$ операторунун жардамында чыгарылат:

$$\left|\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}\right| \text{simplify} \rightarrow 1$$

$$\frac{1}{x-1}\cdot\left|\begin{pmatrix} x & 3 \\ 1 & x+2 \end{pmatrix}\right| \text{simplify} \rightarrow x+3 .$$

Функциялардын категорияларын кармаган (4) каталогдо «Vector and Matrix» жолчосуна мыштын сол кнопкасын бассак, «Названия функций» терезесиндеги матрицанын бардык функциялары менен таанышып, каалаганын тандоого болот. Алардын көбүрөөк колдонула тургандарын карайбыз.

rref(A) – A матрицасынан элементардык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамында бирдик матрица бөлүнүп алынат. Мисалы,

$$\mathrm{rref}\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Identity(n) – n- тартиптеги бирдик матрица;

Diag(ν) – ν векторунун диагоналдык координаталарынын диагоналдык матрицасы,

eigenvals(A) – A квадраттык матрицасынын өздүк сандарын эсептейт. Жекече учурда (18) матрица үчүн

$$\mathrm{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} -0.372 \\ 5.372 \end{pmatrix} .$$

eigenvecs(A) - өздүк векторлорду эсептейт. Мында өздүк векторлорду издөө тартиби eigenvals(A) өздүк сандарды издөөнүн тартибине тиешелеш келет. Мисалы, (18) матрица үчүн,

$$\text{eigenvecs}(A) = \begin{pmatrix} 0.825 & 0.416 \\ -0.566 & 0.909 \end{pmatrix}$$

eigenvecs(A,z) – z санына тиешелүү өздүк векторду эсептейт.
Rank(A) – A матрицасынын рангы;
Iisolve(A,v) – AX=v сызыктуу теңдемелер системасынын чечими;
Мисалы, A матрицасы (18) болсо, анда

$$\text{lsolve}\left[A, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

submatrix(A,in, ik,jn,jk) – in ден ik чейинки жолчолордун менен jn ден jk чейинки мамычалардын кесилишинде жайгашкан элементтерден түзүлгөн камтылуучу матрица.

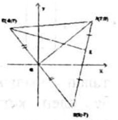
§2. Аналитикалык геометрия

MathCAD программасында аналитикалык геометриянын типтүү маселелерин чечүүнү карайлы.

Мисал 3.2.1 A(7;8), B(6;-7) жана C(-6;7) чокуларына ээ ABC үч бурчтугу берилген. Тапкыла:

а) A, B, C бурчтарын тапкыла;
б) Медианалардын кесилиш чекитинин координатасын жана ал чекиттен A чокусуна чейинки аралык;
в) бийиктиктердин кесилиш чекитинин координатасы;
г) A чокусунан түшүрүлгөн бийиктиктин узундугу;
д) ABC үч бурчтугунун аянты;

Чыгаруу. Маселеге чийме чийебиз:



а) Барактын талаасына төмөнкүлөрдү кийиребиз да,

$$A := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$a := B - A \qquad b := C - A \qquad c := C - B$$

бурчтардын чоңдуктарын эсептейбиз:

$$\text{acos}\left(\frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}\right) = 81.787\,\text{deg} \qquad \text{acos}\left(\frac{-a \cdot c}{|a| \cdot |c|}\right) = 44.415\,\text{deg} \qquad \text{acos}\left(\frac{b \cdot c}{|b| \cdot |c|}\right) = 53.797\,\text{deg}$$

Текшерип көрсөк, 81.787+44.415+53.797=179.999 болот.
б) AB жана BC кесиндилеринин ортосунун координаталарын аныктайбыз:

$$E := \frac{A+B}{2} \qquad E = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$E := \frac{A+B}{2} \qquad E = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

$$O := \frac{B+C}{2} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Эсептөө блогун ачып, (x_0, y_0), (x_1, y_1) чекиттери аркылуу өткөн түздүн каноникалык теңдемесине

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0},$$

медиананын координаталарын коюп, медиананын теңдемесин коебуз. Find командасын терип, белгисиздерди көрсөтүп, жыйынтыкты чыгаруучу операторду кошуп, үч бурчтуктун медианаларынын кесилиш чекитинин координаталарын алабыз:

Given

$$\frac{x - C_0}{E_0 - C_0} = \frac{y - C_1}{E_1 - C_1}$$

$$\frac{x - A_0}{-A_0} = \frac{y - A_1}{-A_1}$$

$$\mathrm{Find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Маселенин шартында талап кылынбагандыктан медиананын теңдемеси табылбагандыгын белгилеп кетүү керек. Медианалардын кесилиш чекитинен A чокусуна чейинки аралыкты эсептейбиз.

$$M := \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \qquad d(M, A) := |A - M| \qquad d(M, A) = 7.087$$

в) Жогоркудай эле жол менен теңдемелерин чекит боюнча түздүн

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

жана нормалдык вектордун жардамында түзүп алып, бийиктиктердин кесилишинин координаталары эсептелет.
Тиешелүү барактык талаанын фрагменти төмөнкү көрүнүштө болот:

Given

$$a_0\cdot(x - C_0) + a_1\cdot(y - C_1) = 0$$
$$b_0\cdot(x - B_0) + b_1\cdot(y - B_1) = 0$$

$$\mathrm{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{483}{97} \\ \frac{608}{97} \end{pmatrix}$$

г) А чокусунан түшүрүлгөн бийиктиктин узундугу:

$$d := \left| \frac{|\mathrm{augment}(a,b)|}{|c|} \right| \qquad d = 10.521$$

д) ABC үч бурчтугунун аянты:

$$S := \frac{1}{2}\cdot\left|\,|\mathrm{augment}(a,b)|\,\right| \qquad S = 97$$

е) AB түзүнө карата C чекитине симметриялуу D чекити эки шарт менен аныкталат:

- CD кесиндисинин ортосу AB түзүнүн теңдемесин канааттандырат;
- D чекитинин координаталары C чекити аркылуу өтүп, AB жагына перпендикуляр болгон түздүн теңдемесин канааттандырат

Аталган шарттарды эсептөө блогуна коюп, D чекитинин координаталарын алабыз:

Given

$$\frac{\frac{-6 + xD}{2} - 7}{6 - 7} = \frac{\frac{7 + yD}{2} - 8}{-7 - 8}$$

$$-(xD + 6) - 15\cdot(yD - 7) = 0$$

$$\mathrm{Find}(xD,yD) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2232}{113} \\ \frac{597}{113} \end{pmatrix}$$

Мисал 3.2.2 S(6;7;13), A(8;-7;-6) , B(-5;6;-7) , C(-3;-4;-10) чокуларына ээ SABC пирамидасы берилген. Тапкыла:

а) A,B,C чекиттери аркылуу өткөн тегиздиктин теңдемесин;

б) SC капталы жана ABC гранынын арасындагы бурчун;

в) ABC гранынын аянтын;

г) S чокусунан ABC гранына түшүрүлгөн бийинтиктин теңдемесин жана узундугун;

д) приамиданын көлөмү;

е) ABC тегиздигине карата S чекитине симметриялуу D чекитинин координатасын;

Чыгаруу. Барактын талаасына төмөнкү туюнтмаларды кийиребиз:

$$S := \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix} \quad d(x,y,z) := \begin{pmatrix} x+3 \\ y+4 \\ z+10 \end{pmatrix}$$

$$a := S - C \qquad b := A - C \qquad c := B - C$$

а) A, B, C чекиттери аркылуу өткөн тегиздиктин теңдемеси төмөнкү блок менен аныкталат:

$$b \times c \cdot d(x,y,z) = 0 \text{ solve}, z \rightarrow \frac{49}{78} \cdot x - \frac{461}{78} + \frac{43}{78} \cdot y$$

Б.а. $$z = \frac{49}{78} \cdot x - \frac{461}{78} + \frac{43}{78} \cdot y$$.

Текшерүү жүргүзсөк:

$$\frac{49}{78} \cdot x - \frac{461}{78} + \frac{43}{78} \cdot y \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x = -5 \\ \text{substitute}, y = 6 \end{array} \right. \rightarrow \frac{-224}{39},$$

$$\frac{49}{78} \cdot x - \frac{461}{78} + \frac{43}{78} \cdot y \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x = -3 \\ \text{substitute}, y = -4 \end{array} \right. \rightarrow -10$$

болот.

б) SC капталы жана ABC гранынын арасындагы α бурчунун чоңдугу:

$$\frac{b \times c \cdot a}{|b \times c| \cdot |a|} = 0.364 \quad \operatorname{acos}(0.455) = 1.098 \qquad \alpha := \frac{\pi}{2} - 0.098 \qquad \alpha = 84.385\text{deg}$$

в) ABC гранынын аянты:

$$S := \left| \frac{1}{2} \cdot |b \times c| \right| \qquad S = 50.828$$

г) S чокусунан ABC гранына түшүрүлгөн бийиктиктин каноникалык теңдемеси

$$b \times c = \begin{pmatrix} -49 \\ -43 \\ 78 \end{pmatrix}$$

болгондуктан

$$\frac{x-6}{-49} = \frac{y-7}{-41} = \frac{z-13}{104}$$

көрүнүштө болот.

Бийиктиктин узундугу

$$d := \left| \frac{b \times c \cdot d(6,7,13)}{|b \times c|} \right| \qquad d = 8.657$$

д) пирамиданын көлөмү:

$$V := \left|\frac{(a \times b)\cdot c}{6}\right| \qquad V = 163$$

Мисал 3.2.3 Квадраттык форманы каноникалык түргө келтиргиле

$$4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

Чыгаруу. Барактын талаасына квадраттык форманын матрицасын кийирип, өздүк векторлорду табабыз

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Жооп: $6x_1^2 + x_2^2 - 6x_3^2$.

§3. Математикалык анализ

Математикалык анализдин негизги маселелерин чечүү үчүн MathCADда атайын панель кызмат кылат:

(20)

(20) панель кнопкасына мыштын сол кнопкасын басып, чакырылат.

1. Функциялардын пределдери (20) панелдин төмөнкү жолчосундагы кнопкалардын жардамында эсептелет. кнопкасына мыштын сол кнопкасын бассак, барактын талаасына төмөнкүдөй трафарет чыгат:

$$\lim_{\blacksquare \to \blacksquare} \blacksquare$$

Трафаретти толтуруп, аны бөлүп алабыз да (11) панелдин $\rightarrow$ кнопкасына, анан кийирүү таласынын сырткы бөлүгүнө мыштын сол кнопкасын бассак жыйынтык пайда болот.

Мисал 3.3.1 Эсептегиле:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x\right)$$

Чыгаруу. Пределдерди эсептөө шаблонун ачып толтурабыз да, бөлүп алып, (11) панелдин $\rightarrow$ кнопкасына, анан кийирүү таласынын сырткы бөлүгүнө мышты басабыз. Анда

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}\right) \rightarrow 0$$

Жооп: 0.

Мисал 3.3.2 Эсептегиле:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot \tan(x)\ \to 1$$

Жооп: 1.

Мисал 3.3.3 Эсептегиле:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$$

Чыгаруу.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\ \to \frac{1}{2},$$

Жооп: 0,5.

(20) панелдин төмөнкү катарындагы калган эки кнопка бир жактуу пределдерди эсептөө үчүн колдонулат. Эсептөө тартиби жогоркудай эле болот. Мисалы,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}\to -1$$

Мисал 3.3.4 Функциянын үзүлүү чекиттерин таап мүнөзүн изилдегиле:

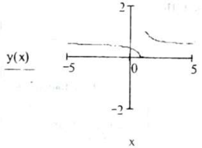
$$f(x)=\frac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}+1}$$

Чыгаруу. $x=1$ **чекити гана үзүлүү чекити боло алат. Бир жактуу пределдерди эсептейбиз:**

$$y(x):=\frac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}+1}$$

$$\lim_{x\to 1^-}y(x)\to 0 \qquad \lim_{x\to 1^+}y(x)\to 1,$$

Демек, $x=1$ **биринчи роддогу үзүлүү чекити. Графигин тургузабыз:**



Жооп: $x = 1$ биринчи роддогу үзүлүү чекити.

2. Биринчи тартиптеги туундулар $\frac{d}{dx}$ кнопкасынын жардамында чакырылуучу

$$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$$

шаблонунун жардамында эсептелет. Белгиленген позицияларды толтургандан кийин жыйынтык кадимки жол менен чыгарылат, Мисалы,

$$\frac{d}{dx}x^2 \to 2\cdot x$$

Ушул эле кнопканын жардамында 1-тартиптеги жекече туундулар эсептелет.

Мисалы,

$$\frac{d}{dx}x^y \to x^y\cdot\frac{y}{x},$$

$$\frac{d}{dy}x^y \to x^y\cdot\ln(x)$$

Ушундай эле жол менен $\frac{d^n}{dx^n}$ кнопкасынын жардамында жогорку тартиптеги туундулар эсептелет. Туундуларды эсептөөдө компакттуу жыйынтыктарды алуу үчүн символдук өзгөртүп түзүүлөрдүн командалары менен кошумчалоо максатка ылайыктуу.

Мисал 3.3.5 Туундуну тапкыла:

$$y = \sqrt{\frac{tgx + 2\sqrt{tgx + 1}}{tgx - 2\sqrt{tgx + 1}}}$$

Чыгаруу. Барактын талаасына

$$y(x) := \sqrt{\frac{\tan(x) + 2\sqrt{\tan(x) + 1}}{\tan(x) - 2\sqrt{\tan(x) + 1}}}$$

функциясын кийиребиз.

Туундунун шаблонун ачып, толтурабыз. Алынган туюнтманы бөлүп алып, (11) панелдеги «simplify», «factor», « → " кнопкаларына мышты басабыз. Мыштын көрсөткүчү кийирүү талаасынын сырткы бөлүгүнө бассак жыйынтык алынат.

$$\frac{d}{dx}y(x) \;\Big|\; \begin{array}{l}\text{simplify}\\ \text{factor}\end{array} \rightarrow -(\tan(x)-1)\cdot\frac{\left(1+\tan(x)^2\right)}{\left[\frac{-\left(\tan(x)+2\cdot\tan(x)^{\frac{1}{2}}+1\right)}{\left(-\tan(x)+2\cdot\tan(x)^{\frac{1}{2}}-1\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\tan(x)+2\cdot\tan(x)^{\frac{1}{2}}-1\right)^2\cdot\tan(x)^{\frac{1}{2}}}$$

3. Анык эмес интегралдар $\int$ кнопкасынын жардамында эсептелет. Бул кнопкага мышты бассак, барактын талаасына төмөнкү шаблонду коет:

$$\int \blacksquare\, d\blacksquare$$

Белгиленген позицияларды толтургандан кийин, стандарттык жол менен турактуу коэффициентсиз жыйынтык чыгарылат. Мисалы,

$$\int \sin(x)\,dx \rightarrow -\cos(x)$$

Туундуну тапкан сыяктуу эле анык эмес интегралдарды эсептөөдө компакттуу жыйынтыктарды алуу үчүн, символдук өзгөртүп түзүүлөрдүн командаларын кошумчалоо керек. Мисалы,

$$\int \frac{1}{\left(x^2-3\right)\cdot\sqrt{4-x^2}}\,dx \rightarrow \frac{-1}{6}\cdot\operatorname{atanh}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\left[2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)\right]}{\left[-\left(x-\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)+1\right]^{\frac{1}{2}}}\right]\cdot\sqrt{3}+$$

$$+\frac{1}{6}\cdot\operatorname{atanh}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\left[2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)\right]}{\left[-\left(x+\sqrt{3}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)+1\right]^{\frac{1}{2}}}\right]\cdot\sqrt{3}$$

Рационалдуу чечим төмөнкүчө алынат:

$$\int \frac{1}{\left(x^2-3\right)\cdot\sqrt{4-x^2}}\,dx \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{6}\cdot\operatorname{atanh}\left[\frac{\left(-4+x\cdot\sqrt{3}\right)}{\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{6}\cdot\operatorname{atanh}\left[\frac{\left(4+x\cdot\sqrt{3}\right)}{\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\cdot\sqrt{3}$$

4. Анык интегралдар $\int_a^b$ кнопкасы менен чакырылган төмөнкү шаблон менен эсептелет:

$$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare\, d\blacksquare \qquad (21)$$

Эсептөөнүн так жыйынтыгын алуу «Вычислить символьно» командасынын, ал эми жакындаштырылган жыйынтыкты алуу <=> клавишасынын жардамында ишке ашат.

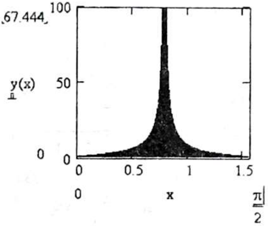
Мисал 3.3.6 Төмөнкү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле:

$$y=\cos^5 x\cdot\sin 2x,\quad y=0,\ \ 0\le x\le\frac{\pi}{2}.$$

Чыгаруу. Берилген функцияны барактын талаасына кийиребиз:

$$y=\cos(x)^5\cdot\sin(2\cdot x)$$

X-Y Plot графиктерди тургузуу талаасын ачып, белгиленген позицияларды толтурабыз. Ушул эле жерде маселенин шартынан алып x тин чек аралык өзгөрүү аралыгын, ошондой эле y=0 эң кичине маанисин беребиз. Графиктин параметрлерин өзгөртүүчү диалогдук терезедеги **«Traces»** бетиндеги **«Тип»** бөлүгүнө **«bar»** тибин орнотсок төмөнкү сүрөттөлүштү алабыз:



Фигуранын аянтын эсептейли:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^5\cdot\sin(2\cdot x)\,dx\rightarrow\frac{2}{7}$$

Жооп: $\frac{2}{7}$.

Мисал 3.3.7 $y=\ln x$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$ ийрисинин жаасынын узундугун эсептегиле:

Чыгаруу.

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}\ln(x)\right)^2}\,dx\rightarrow 2-\operatorname{atanh}\left(\frac{1}{4}\right)+\operatorname{atanh}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Жооп: $2-\operatorname{atanh}\left(\frac{1}{4}\right)+\operatorname{atanh}\left(\frac{1}{2}\right)$

Мисал 3.3.8 Полярдык координаталарда

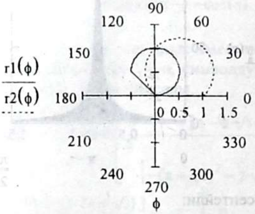
$$r = \sin\phi,\quad r = \sqrt{2}\cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right),\quad 0 \le \phi \le \frac{3\pi}{4}$$

теңдемелери менен берилген сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

Чыгаруу. ϕ ге чектөөлөр болгондуктан барактын талаасына функцияларды кийирүүдө «**AddLine**» жана «Программалоо» панелинин «**if**» кнопкаларын колдонобуз.

$$r1(\phi) := \begin{array}{|l} \sin(\phi)\ \text{if}\ 0 \le \phi \le \frac{3\cdot\pi}{4} \\ 0\ \text{if}\ \phi > \frac{3\cdot\pi}{4} \end{array} \qquad r2(\phi) := \begin{array}{|l} \sqrt{2}\cdot\cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)\ \text{if}\ 0 \le \phi \le \frac{3\cdot\pi}{4} \\ 0\ \text{if}\ \phi > \frac{3\cdot\pi}{4} \end{array}$$

X-Y Polar тургузуу талаасын ачып, белгиленген позицияларды толтуруп, сызыктардын фигура менен чектелген сүрөттөлүшүн алабыз:



Сүрөттөлүштө көрүнгөндөй фигура эки ийри сызыктуу сектордон турат. Ийри сызыктуу сектордун аянтын

$$S = \frac{1}{2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta} r(\phi)\, d\phi$$

формуласы боюнча табабыз. Анда

$$S := \frac{1}{2}\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} r1(\phi)^2\, d\phi + \frac{1}{2}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\cdot\pi} r2(\phi)^2\, d\phi \qquad S = 0.535$$

Жооп: 0.535.

(21) формуланын жардамында анык интегралдар гана эсептелбестен, чектелбеген аралыктарда өздүк эмес интегралдарды, ошондой эле кош интегралдарга келтирилүүчү эселүү интегралдарды эсептөөгө болот.

Мисалы,

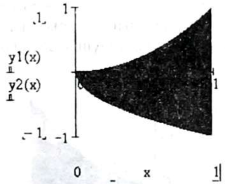
$$\int_{1}^{\infty} x^{\frac{-3}{2}}\, dx = 2 \qquad \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} 1\, dy\, dx = $$

Мисал 3.3.9. Эсептегиле:

$$\iint_{D}(12x^2y^2+16x^3y^3)dxdy,$$

Мында $D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

Чыгаруу. Интегралдоо областын түзөбүз:



Барактын талаасына

$$f(x,y) := 12\cdot x^2\cdot y^2 + 16\cdot x^3\cdot y^3$$

кийиребиз.

Интегралды кош интегралга келтирип, аны эсептөө үчүн (21) шаблондун жардамында тиешелүү трафаретти колдонобуз:

$$\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{x}}^{x^2} f(x,y)\, dy\, dx \to 1$$

Жооп: 1.

Ушундай эле жол менен үчтүк интегралдар эсептелет.

Мисал 3.3.10. Эсептегиле:

$$\iiint_{V}(3x^2+y^2)dxdydz,$$

мында, $V: z=10y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

Чыгаруу.

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x}\int_{0}^{10\cdot y}\left(3\cdot x^2+y^2\right) dz\, dy\, dx \to 1$$

Жооп: 1.

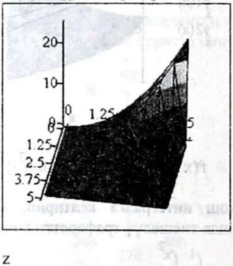
Мисал 3.3.11. Беттер менен чектелген телонун көлөмүн тапкыла:

$$z=y^2,\quad x+y=5,\quad x=0,\quad y=0,\quad z=0.$$

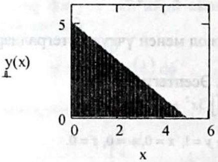
Чыгаруу. Программалоо панелинин кнопкаларынын жардамында барактын талаасына төмөнкү туюнтманы кийиребиз:

$$z(x,y) := \begin{cases} y^2 & \text{if } (x + y \le 5) \wedge (x \ge 0) \wedge (y \ge 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

кнопкасынын жардамында геометриялык түзүүлөрдүн менюсундагы беттерди тургузуу талаасын чакырабыз да белгиленген позицияга <z> символун кийиребиз. График тургузуу талаасынын сырткы бөлүгүнө мыштын сол кнопкасын бир жолу басып, пайда болгон бетти форматтайбыз. Графикке мыштын сол кнопкасын эки жолу басып «Формат 3-D графика» диалогдук терезесин чакырабыз. «Оси»(октору) бетин ачып, «ось-Х»(Х огу), «ось-У»(У огу) бөлүктөрүндөгү «Авто сетка» пункттарындагы белгилерди алып салабыз да, Минимум-0, Максимум-5 өзгөртүүлөрүн кийиребиз. Сүрөттөлүштү боеп коюшубуз мүмкүн.



Берилген телонун хОу тегиздигиндеги проекциясын тургузабыз:



Кош интегралды кайталануучу интегралга келтирип, интегралдоо пределдерин коюп. мурдакыдай эле жол менен интегралды эсептейбиз:

$$V := \int_0^5 \int_0^{5-x} y^2 \, dy \, dx \qquad V = 52.083$$

Жооп: 52,083.

5. Сандык катарларды жыйналуучулукка изилдөө $\sum$ кнопкасынын жардамында жүргүзүлөт(жыйналуучу болсо суммасы табылат). Бул кнопкага мыштын сол кнопкасын бир жолу бассак төмөнкү трафарет пайда болот:

$$\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \qquad (22)$$

Мисалы,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} \rightarrow 2\cdot\exp(1)\cdot(1-\exp(-1))$$

,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \infty$$

6. Даражалуу катарлардын суммасы 5-пункттагыдай эле табылат.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$$

Ал эми абсолюттук жана шарттуу жыйналуучулуктар (20) панелди колдонуп, катарлардын теориясындагы стандарттык жолдор менен аныкталат.

7. Катарларды Маклорендин катарына ажыратуу (11) панелдин «series» кнопкасынын жардамында аткарылат. Бул кнопка барактын талаасына $\blacksquare$ series $,\blacksquare,\blacksquare \rightarrow$ шаблонун коет. Мында белгиленген позициялар: функция, өзгөрүлмө, биринчи алынып ташталган мүчөнүн даражасы.

Мисалы,

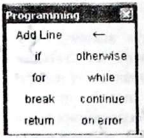
$$\sin(x) \text{ series}, x, 7 \rightarrow x-\frac{1}{6}\cdot x^3+\frac{1}{120}\cdot x^5$$

,

$$\ln\left(1-x-6\cdot x^2\right) \text{ series}, x, 5 \rightarrow -x-\frac{13}{2}\cdot x^2-\frac{19}{3}\cdot x^3-\frac{97}{4}\cdot x^4$$

§4. Программалык блоктор

MathCADдын инструменттериндеги кнопкасына мышты басып, Программалоо панелин ачабыз:



Бул панелдеги операторлордун кызматтары төмөнкүчө:

Add Line – программалык блокко сол жагынан вертикалдык жоон сызык менен бөлүнгөн жолчону кошот(модул, камтылуучу модул);

← - «локалдык ыйгаруу» оператору;

if - «эгерде» оператору;

for - кайталануу саны берилген циклдик оператор;

while - азырынча кандайдыр шарт аткарылган учурда аткарылуучу циклдик оператор;

otherwise - «антпесе» оператору;

break - эсептөөлөрдү токтотуу оператору;

continue - эсептөөлөрдү улантуу оператору;

return - эсептөөлөрдү токтотот да, андан кийин турган операнддын маанисин берет;

on error - каталарды кайра иштетүү оператору;

«Программалоо» панелинин кнопкаларынын жардамында коюлган шаблондор тиешелүү түрдө төмөнкүчө көрүнүштөрдө болот:

▪ ▪	▪ ← ▪
▪ if ▪	▪ otherwise
for ▪ ∈ ▪ ▪	while ▪ ▪
break	continue
return ▪	▪ on error ▪

Программалык блокторду түзүүнүн негизги принциптерин мисалдарда карайбыз.

Мисал 3.4.1. Эгерде баштапкы маани $a=1$, кадам $h=0{,}1$, кадамдардын саны $n=5$ болсо, $y=x^2$ функциясынын маанилеринин векторун табуу үчүн программалык блок түзгүлө.

Чыгаруу. Бларактын талаасына берилген функцияны кийиребиз:

$$y(x) := x^2$$

<p><<Shift>+<:>> комбинациясын терип, мыштын сол кнопкасын **«for»** кнопкасына бир жолу басабыз да, белгиленген позицияларды толтурабыз. Экинчи жолчону бөлүп алып, **«AddLine»** кнопкасына мыштын сол кнопкасын бир жолу басып, үчүнчү жолчону толтурабыз. Бардык оң жак бөлүктү бөлүп алып, мыштын сол кнопкасын **«AddLine»** кнопкасына бир жолу басабыз. Сол жакта вертикалдык сызык пайда болуп, толтуруу үчүн белгиленген позиция пайда болот. Аны толтургандан кийин төмөнкү блокту алабыз:

$$p := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..5 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow 1 + 0.1 \cdot i \\ p_i \leftarrow y(x) \end{array} \right. \\ p \end{array} \right.$$

<p><=> клавишаларын терсек маанилердин вектору пайда болот:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.21 \\ 1.44 \\ 1.69 \\ 1.96 \\ 2.25 \end{pmatrix}.$$

Жалпы учурда маанилердин вектору функция менен аныкталат:

$$p(a,h,n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow a + h \cdot i \\ p_i \leftarrow y(x) \end{array} \right. \\ p \end{array} \right.$$

Эгерде маанилердин таблицасын (векторду эмес) чыгаруу керек болсо, анда чечим:

$$y(x) := x^2$$

$$P := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..5 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow 1 + 0.1 \cdot i \\ p^{\langle i \rangle} \leftarrow \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} \end{array} \right. \\ p \end{array} \right.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1.1 & 1.2 & 1.3 & 1.4 & 1.5 \\ 1 & 1.21 & 1.44 & 1.69 & 1.96 & 2.25 \end{pmatrix}.$$

Мисалы төмөнкү функциянын маанилеринин таблицасын программалык блоктун жардамында көрсөтөлү:

$$z = x^2 + y^2, \quad x \in [-2;2], \quad y \in [-2;2], \quad n = 50, \quad h = 0.08.$$

$$z(x,y) := x^2 + y^2$$

```
Z := | for i ∈ 0.. 50
     |    for j ∈ 0.. 50
     |       | x ← −2 + 0.8·i
     |       | y ← −2 + 0.8·j
     |       | Z[i,j] ← z(x,y)
     | Z
```

Ошентип, (14) катышты бир топ компакттуу жазуу мүмкүн болот.

Мисал 3.4.2. Эгерде $a_1 = 1, d = 6$ болсо, программалык блоктун жардамында арифметикалык прогрессиянын бешинчи мүчөсүн табылсын.

Чыгаруу.

```
S := | a ← 1                    S = 65
     | s ← 1
     | for i ∈ 1.. 4
     |    | a ← a + 6
     |    | s ← s + a
     | s
```

«While» операторунун аракетин n! (n факториал) туюнтмасын эсептөөнүн программалык блогун түзүү аркылуу көрөбүз.

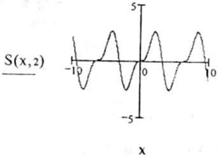
```
F(n) := | i ← 1                 F(6) = 720
        | k ← 0
        | while k ≤ n − 1
        |    | k ← k + 1
        |    | i ← i·k
        | i
```

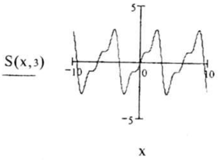
Фурьенин катарынын $S_n(x)$ жекече суммасын табуунун белгилүү усулдарына ылайык MathCAD программасында $S_n(x)$тин графиктери маанилердин таблицасынын жардамында тургузулат. Эгерде программалык блоктордун жардамында Фурьенин катарынын коэффициенттерин аныктабастан жекече суммаларын аныктасак, анда таблицанын зарылчылыгы жок болуп калат.

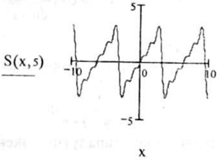
Мисал 3.4.3. $f(x)=x,\ -\pi \le x < \pi$ функциясынын Фурье катарынын $S_2(x),\ S_3(x),\ S_5(x),\ S_7(x)$ жекече суммаларын таап, графиктерин тургузгула.

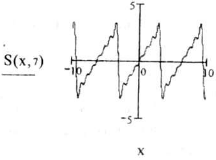
$$f(x) := x$$

$$S(x,n) := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} a_k \leftarrow \dfrac{1}{\pi} \cdot \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx \\ b_k \leftarrow \dfrac{1}{\pi} \cdot \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(k\cdot x)\,dx \end{array} \right. \\ \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(a_k\cdot\cos(k\cdot x) + b_k\cdot\sin(k\cdot x)\right) \end{array} \right.$$









Өз алдынча иштөө үчүн мисалдар.

1. Амалдарды аткаргыла:

а) $m\cdot\begin{pmatrix} m-n & n \\ 2 & 0 \\ m+n & -m \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2m & 1 \\ n & -m \\ 2 & n \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & m & n+1 \\ 0 & 2\cdot n & -2 \\ 3 & 1 & m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & n \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Матрицалардын аныктагычтарын эсептегиле:

а) $\begin{vmatrix} m+n & m & n \\ -1 & m-n & -m \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} m^2+1 & m\cdot n & m \\ m\cdot n & n^2+1 & n \\ m & n & 2 \end{vmatrix}$.

3. Транспонирленген матрица, тескери матрица, өздүк сан жана өздүк векторлор табылсын:

а) $\begin{pmatrix} m-n & m \\ -n & m+n \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} m^2+1 & m\cdot n & m \\ m\cdot n & n^2+1 & n \\ m & n & 2 \end{pmatrix}$.

4. Системаларды чечкиле:

а) $\begin{cases} x_1+n\cdot x_2+m\cdot x_3=n-m+1 \\ -2\cdot x_1+x_2=-1 \\ 3\cdot x_1-m\cdot x_3=n+3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2\cdot x_1+3\cdot x_2+x_3=2\cdot m+3\cdot n-1 \\ n\cdot x_1+n\cdot x_2+(m-n)x_3=m^2+n^2+n-m \\ (m+n)\cdot x_1+m\cdot x_2+n\cdot x_3=m^2+2\cdot m\cdot n-n \end{cases}$.

5. Пределдерди эсептегиле:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{m}{n}}\dfrac{m\cdot n\cdot x^2-(m^2+n^2)\cdot x+m\cdot n}{x-\dfrac{m}{n}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(m\cdot x)-\cos[(m+n)\cdot x]}{x-\dfrac{m}{n}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{m\cdot x-n}{m\cdot x+n}\right)^{m\cdot x}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+m\cdot x+n}-\sqrt{x^2-n\cdot x+m}$.

6. Биринчи жана экинчи тартиптеги туундуларды тапкыла:

а) $y=\dfrac{\ln(m\cdot x)}{x^n}$; б) $y=\sin(\sqrt{n\cdot x+m})$; в) $y=(n+1)^{\frac{1}{n\cdot x+m}}$; г) $y=ar\cos(\dfrac{x}{\sqrt{n-x^2}}$.

7. Анык эмес интегралдарды эсептегиле:

а) $\int\dfrac{1}{x\cdot\sqrt{m\cdot x-n\cdot x^2}}dx$; б) $\int(x+m)^2\cdot\exp(-n\cdot x)dx$;

в) $\int\dfrac{n\cdot x-m}{(x+1)\cdot(x^2+2\cdot m\cdot x+2\cdot n)}dx$; г) $\int\dfrac{1}{\sin(m\cdot x)+n}dx$.

8. Өздүк эмес интегралдарды эсептегиле (же таралуучу экендигин аныктагыла):

а) $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{1}{m\cdot x^4+m\cdot x^2+1}dx$; б) $\int\limits_n^{\infty}\dfrac{1}{(n^2+x^2)\cdot arctg\left(\dfrac{x}{n}\right)}dx$.

9. Биринчи жана экинчи тартиптеги жекече туундуларды тапкыла:

а) $z=(m\cdot x-n)^2\cdot y^n+x^m\cdot(m\cdot y+n)^3+m\cdot n$; б) $z=\exp\left(\dfrac{m\cdot x-n}{n\cdot y+m}\right)$.

10. Жыйналуучулукка изилдегиле:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k+n}+m}{3^{k+m}+n}$; б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(m+n)^k\cdot k!}{k^k}$.

11. Берилген сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын таап, схемалык чиймелерин чийгиле:

а) $y=x^2+mx-n^2$, $(mn+n^2)x-(m+n)y+m^2n-n^3=0$; б) $(x^2+y^2)^2=2(m+n)^2xy$.

12. Беттер менен чектелген телонун көлөмүн тапкыла:

а) $z=ny,\ mx+ny=mn,\ x=0,\ z=0$; б) $nz=x^2+y^2, z=n, x=0, ny=mx$.

13. Берилген интервалда $f(x)$ функциясын Фурьенин катарына ажыратып, $S_2(x), S_3(x), S_5(x)$ жекече суммаларын тапкыла:

а) $(-\pi,\pi)$ интервалында $f(x)=\begin{cases}\frac{n}{\pi}(x+\pi), \text{при } -\pi<x\le 0\\ m, \text{ при } 0<x<\pi\end{cases}$;

б) $(0,m)$ интервалында $f(x)=(x-m)^2$;

в) $(0,\frac{\pi}{m+n})$ интервалында $f(x)=\sin^2(m+n)x$.

14. Эгерде $b_1=m, q=\frac{1}{n+1}, k=m+n+3$ болсо, программалык блоктун жардамында геометриялык прогрессиянын k - чы мүчөсүн эсептегиле.

15. 14-маселеде берилген шарттар боюнча геометриялык прогрессиянын биринчи k мүчөсүнүн суммасын табуучу программалык блокту түзгүлө.

§1. Экинчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдемелер

MathCAD программасында $ay''+by'+cy=0$ турактуу коэффициенттүү дифференциалдык теңдемелердин жалпы чечимдери программалык блоктун жардамында төмөнкүчө табылат:

$$y(x,a,b,c,C1,C2) := \left| \begin{array}{l} D \leftarrow b^2 - 4\cdot a\cdot c \\ r1 \leftarrow \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2\cdot a} \\ r2 \leftarrow \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2\cdot a} \\ (C1\cdot \exp(r1\cdot x) + C2\cdot \exp(r2\cdot x)) \ \text{ if } D>0 \\ (C1\cdot \exp(r1\cdot x) + C2\cdot \exp(r1\cdot x)) \ \text{ if } D=0 \\ \exp(\mathrm{Re}(r1)\cdot x)(C1\cdot \cos(\mathrm{Im}(r1)\cdot x) + C2\cdot \sin(\mathrm{Im}(r1)\cdot x)) \ \text{ if } D<0 \end{array} \right.$$

Барактын талаасына бул блокту кийирип, жогорку көрүнүштөгү каалаган дифференциалдык теңдемелердин чечимдерин жеңил эле таба алабыз. Мисалы, эгерде

$$y''+2y'-3y=0,$$

теңдемеси берилсе, төмөнкү чечимди алабыз:

$$y(x,1,2,-3,C1,C2) \rightarrow C1\cdot \exp(x) + C2\cdot \exp(-3\cdot x)$$

Эгерде

$$y''+2y'+y=0,$$

теңдемеси берилсе, чечим

$$y(x,1,2,1,C1,C2) \rightarrow C1\cdot \exp(-x) + C2\cdot \exp(-x)$$

көрүнүшүндө болот, эгерде

$$y''+2y'+10y=0,$$

теңдемеси берилсе, чечим

$$y(x,1,2,10,C1,C2) \rightarrow \exp(-x)\cdot (C1\cdot \cos(3\cdot x) + C2\cdot \sin(3\cdot x))$$

көрүнүшүндө болот.

Мейли биринчи теңдеменин $y(1)=2,\ y''(1)=3$ баштапкы шарттарын канааттандырган жекече чечимин табуу талап кылынсын. Анда барактын талаасына кошумча төмөнкү туюнтманы кийиребиз:

$$z(x,C1,C2) := \frac{d}{dx} y(x,1,2,-3,C1,C2)$$

Эсептөө блогун ачып, турактуу чоңдуктардын маанилерин табабыз:

Given

$$y(1,1,2,-3,C1,C2) = 2$$

$$z(1,C1,C2) = 3$$

$$\mathrm{Find}(C1, C2) \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{9}{4\cdot \exp(1)} \\ \dfrac{-1}{4}\cdot \exp(3) \end{pmatrix}$$

Жыйынтыкты төмөнкүчө белгилеп алабыз:

$$M := \begin{pmatrix} \dfrac{9}{4\cdot \exp(1)} \\ \dfrac{-1}{4}\cdot \exp(3) \end{pmatrix}$$

Жекече чечимдерди алабыз:

$$y(x, 1, 2, -3, C1, C2) \left| \begin{array}{l} \mathrm{substitute}, C1 = M_0 \\ \mathrm{substitute}, C2 = M_1 \end{array} \right. \rightarrow \frac{9}{4\cdot \exp(1)}\cdot \exp(x) - \frac{1}{4}\cdot \exp(3)\cdot \exp(-3\cdot x)$$

Сызыктуу бир тектүү эмес 2-тартиптеги турактуу коэффициенттүү дифференциалдык теңдемелердин жекече чечимдерин табуунун усулдарын мисалдарда карайлы.

Мисал 4.1.1. $y'' + 2y' - 3y = x^2 + 1$ теңдемесинин жекече чечимин тапкыла.

Чыгаруу. Дифференциалдык теңдемелердин теориялык курсунан белгилүү болгондой, мындай теңдемелердин жекече чечими анык эмес коэффициенттер усулу менен

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

көрүнүшүндө изделет.

Дифференциалдык теңдеменин бардык компоненттерин блоктун сол жагына өткөрөбүз да

$$y'' + 2\cdot y' - 3\cdot y - x^2 - 1 \left| \begin{array}{l} \mathrm{substitute}, y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c \\ \mathrm{substitute}, y' = \dfrac{d}{dx}\left(a\cdot x^2 + b\cdot x + c\right) \\ \mathrm{substitute}, y'' = \dfrac{d^2}{dx^2}\left(a\cdot x^2 + b\cdot x + c\right) \\ \mathrm{collect}, x \\ \mathrm{coeffs}, x \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot a - 3\cdot c + 2\cdot b - 1 \\ -3\cdot b + 4\cdot a \\ -1 - 3\cdot a \end{pmatrix}$$

Алынган жыйынтыкты буфер эске алып, solve кнопкасынын жардамында ачылган трафареттин солдогу белгиленген позициясына коебуз. Алынган ар бир элементин нөлгө барабарлап, белгисиздерди кийиребиз да алардын маанилерин алабыз:

$$\begin{pmatrix} 2\cdot a - 3\cdot c + 2\cdot b - 1 = 0 \\ -3\cdot b + 4\cdot a = 0 \\ -1 - 3\cdot a = 0 \end{pmatrix} \mathrm{solve}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{3} & \dfrac{-4}{9} & \dfrac{-23}{27} \end{pmatrix}$$

Жыйынтыкты копиялап,

$$M := \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-4}{9} & \frac{-23}{27} \end{pmatrix}^{T}$$

белгилеп алабыз да, жекече чечимди чыгарабыз:

$$y(x) := M_0 \cdot x^2 + M_1 \cdot x + M_2 \quad y(x) \to \frac{-1}{3} \cdot x^2 - \frac{4}{9} \cdot x - \frac{23}{27}$$

Текшерүү жүргүзсөк:

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2 \cdot \frac{d}{dx} y(x) - 3 \cdot y(x) \text{ collect}, x \ \to 1 + x^2$$

Жооп: $y = \frac{-1}{3} \cdot x^2 - \frac{4}{9} \cdot x - \frac{23}{27}$.

Кээ бир учурларда эгерде өзгөрмөлөрдүн аттары көрсөтүлбөсө программа ордуна коюудан баш тартат. Анда төмөнкү жол менен чечебиз.

Мисал 4.1.2. $y'' - 16y = (1-x)e^{4x}$ теңдемесинин жекече чечимдерин табалы.

Чыгаруу.

$$\frac{y''(x,a,b) - 16 \cdot y(x,a,b) - (1-x) \cdot \exp(4 \cdot x)}{\exp(4 \cdot x)} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, y(x,a,b) = \left(a \cdot x^2 + b \cdot x\right) \cdot \exp(4 \cdot x) \\ \text{substitute}, y''(x,a,b) = \frac{d^2}{dx^2}\left(a \cdot x^2 + b \cdot x\right) \cdot \exp(4 \cdot x) \\ \text{simplify} \\ \text{collect}, x \\ \text{coeffs}, x \end{array} \right. \to \begin{pmatrix} 2 \cdot a + 8 \cdot b - 1 \\ 16 \cdot a + 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{y''(x,a,b) - 16 \cdot y(x,a,b) - (1-x) \cdot \exp(4 \cdot x)}{\exp(4 \cdot x)} \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, y(x,a,b) = \left(a \cdot x^2 + b \cdot x\right) \cdot \exp(4 \cdot x) \\ \text{substitute}, y''(x,a,b) = \frac{d^2}{dx^2}\left(a \cdot x^2 + b \cdot x\right) \cdot \exp(4 \cdot x) \\ \text{simplify} \\ \text{collect}, x \\ \text{coeffs}, x \end{array} \right. \to \begin{pmatrix} 2 \cdot a + 8 \cdot b - 1 \\ 16 \cdot a + 1 \end{pmatrix}$$

Жыйынтыкты копиялап белгисиз коэффициенттердин маанисин табабыз:

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot a + 8 \cdot b - 1 = 0 \\ 16 \cdot a + 1 = 0 \end{pmatrix} \text{solve}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{-1}{16} & \frac{9}{64} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.063 & 0.141 \end{pmatrix}$$

Эми

$$M := \begin{pmatrix} \frac{-1}{16} & \frac{9}{64} \end{pmatrix}^{T}$$

белгилөөсүн жүргүзөбүз да, жекече чечимди чыгарабыз:

$$y(x) := \left(M_0 \cdot x^2 + M_1 \cdot x\right) \cdot \exp(4 \cdot x) \quad y(x) \to \left(\frac{-1}{16} \cdot x^2 + \frac{9}{64} \cdot x\right) \cdot \exp(4 \cdot x)$$

Текшерип көрсөк:

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) - 16\cdot y(x) \ \left|\begin{array}{l}\text{simplify}\\ \text{factor}\end{array}\right. \to -\exp(4\cdot x)\cdot(-1+x)$$

Жооп: $y = \left(\frac{-1}{16}\cdot x^2 + \frac{9}{64}\cdot x\right)\cdot e^{4X}$

§2. Сандык интегралдоонун функциялары

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f(t,\bar{x}), \tag{23}$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \tag{24}$$

системасынын $[t_0, t_k]$ кесиндисиндеги Коши маселесин сандык чечүү MathCAD системасында атайын функциялардын жардамында ишке ашат:

rkfixed(x, t_0, t_k, n, F) - $h = \frac{t_k - t_0}{n}$ турактуу кадамы менен Рунге-Кутта усулу. Мында h кадамы жана ε(тактык) чечимдин пределдик абсолюттук каталыгы $h^4 < \varepsilon$ барабарсыздыгы менен байланышкан. Эгерде

$$\max\frac{\left|y_{2i}^{(h)} - y_{2i}^{(2h)}\right|}{15} < \varepsilon, \tag{25}$$

(мында, $y_{2i}^{(h)}$, $y_{2i}^{(2h)}$ тиешелүү түрдө h жана $2h$ кадамдары менен эсептелген маанилер болсо) шарт аткарылса, анда чечим берилген тактыкта табылды деп эсептелет.

Rkadapt(x, t_0, t_k, n, F) - кадамды автоматтык түрдө тандап алып, бирок $h = \frac{t_k - t_0}{n}$ болгон учурда гана жыйынтыктарды чыгаруучу Рунге-Кутта усулу.

rkadapt$(x, t_0, t_k, \varepsilon, n, F, nmax, s)$ - кадамды автоматтык түрдө тандоочу Рунге-Кутта усулу. Жогоркудан айырмаланып, ε- пределдик абсолюттук каталык, nmax – кадамдардын максималдык саны жана бир ченемдүү эмес сеткадагы эң кичине s - кадамы берилет;

Bulstoer(x, t_0, t_k, n, F) - Булирша-Штоердин усулу;

bubstoer$(x, t_0, t_k, \varepsilon, n, F, nmax, s)$ - Булирша-Штоердин жалпыланган усулу;

Stiffr(t_0, t_k, n, F, J) - катуу системалар үчүн Розенброктун алгоритми. Мында $J(t,x)$ - (23) системанын оң жагынын Якоби матрицасы;

Stiffr$(x, t_0, t_k, \varepsilon, F, J, nmax, s)$ - катуу системалар үчүн Розенброктун алгоритми.

Stiffb(x, t_0, t_k, n, F, J) - катуу системалар үчүн Булирш-Штоердин алгоритми;

$\mathrm{Stiffb}(x, t_0, t_k, \varepsilon, F, J, nmax, s)$ - катуу системалар үчүн жалпыланган Булирш-Штоердин алгоритми;

Кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн Коши маселесинде F функциясы төмөнкү командалар менен аныкталат:

$$x_0 := [\text{берилген баштапкы маани}]$$

$$F(t,x) := f(t, x_0).$$

Ал эми дифференциалдык теңдемелердин системалары үчүн:

$$ORIGIN := 1$$

$$F(t,x) := [\text{оң жактагы матрица}] \tag{26}$$

Аталып өткөн функцияларды барактын талаасына «Вставка функции» диалогдук терезесинин жардамында же клавиатурадан терүү жолу менен да кийирүүгө болот.

Мейли $\frac{dx}{dt} = \sin(t + x)$ теңдемеси $x(0) = 1$ баштапкы шарты менен, $[0,3]$ кесиндисинде берилип, $n = 30$ мааниси тандалсын. Анда теңдеменин чечими туруктуу кадам менен Рунге-Кутта усулунун жардамында үч блоктун жардамында табылат:

$$x_0 := 1$$

$$F(t,x) := \sin(t + x_0)$$

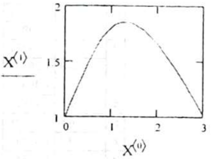
$$X := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 3, 30, F)$$

<X><=> клавишаларын терсек эсептөөлөрдүн жыйынтыгы чыгарылат:

X = (27)

	0	1
0	0	1
1	0.1	1.089
2	0.2	1.185
3	0.3	1.284
4	0.4	1.383
5	0.5	1.478
6	0.6	1.566
7	0.7	1.643
8	0.8	1.709
9	0.9	1.761
10	1	1.801
11	1.1	1.828
12	1.2	1.844
13	1.3	1.848
14	1.4	1.843
15	1.5	1.828

Чечимдин графикалык сүрөттөлүшү төмөнкүчө:

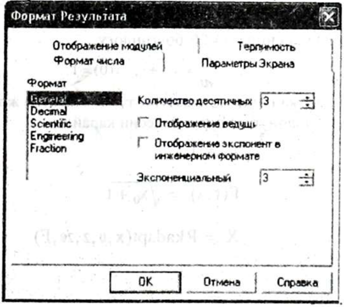


Тургузуу учурунда (27) таблицадан көрүнүп тургандай t нын маанилерине $X^{\langle 0\rangle}$ нөлдүк мамыча тиешелеш келет, ал эми x тин маанилеринде тиешелүү түрдө $X^{\langle 1\rangle}$ маанилеринин мамычасы тиешелүү болот. Ошондуктан график тургузуу талаасын ачкандан кийин белгиленген позицияга горизонталдык ок боюнча алгач

$\blacksquare^{\langle \blacksquare \rangle}$

трафарети коюлат да, $X^{\langle 0\rangle}$ деп толтурулат. Ушундай эле жол менен вертикалдык ок боюнча белгиленген позиция толтурулат. График түзүү талаасынын сырткы бөлүгүнө мыштын сол кнопкасын бир жолу бассак, чиймени алабыз.

(27) таблицадагы маанилердин ондук белгилеринин санын аныктоочу диалогдук Терезе «Формат» менюсундагы «Результат» командасынын жардамында аныкталат:



(27) таблицанын маанилерин бөлүп алып, бул диалогдук терезени чакырабыз да, «Количество десятичных»(ондуктардын саны) пунктундагы 3 тү 5ке алмаштырып, «ОК» кнопкасын бассак, дагы тагыраак жыйынтыктарды көрөбүз:

$X =$

	0	1
0	0	1
1	0.1	1.0887
2	0.2	1.18452
3	0.3	1.28398
4	0.4	1.38318
5	0.5	1.47825
6	0.6	1.56578
7	0.7	1.64315
8	0.8	1.70861
9	0.9	1.7613
10	1	1.80107
11	1.1	1.82829
12	1.2	1.84369
13	1.3	1.84816
14	1.4	1.8427
15	1.5	1.8283

Рунге-Ромбергдин эрежесин пайдаланып, чечимдин тактыгын табабыз. Ал үчүн бpraktыn талаасына

$$Y := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 3, 15, F) \qquad i := 0..15 \qquad Z_i := \left|Y_{i,1} - X_{2\cdot i,1}\right|$$

кийиребиз да төмөнкү туюнтманы эсептейбиз:

$$\frac{\max(Z)}{15} = 1.336 \times 10^{-6}$$

$\varepsilon = 1.337 \times 10^{-6}$ чечимдин тактыгы болуп эсептелет.

[0,2] кесиндисинде $n = 20$ болгондогу

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{x+t}, \quad x(0) = 1,$$

Коши маселесин кадамды автоматтык түрдө аныктоо жолу менен Рунге-Кутта усулун колдонуп чечүү маселесин карайлы.

$$x_0 := 1$$

$$F(t, x) := \sqrt{x_0 + t}$$

$$X := \mathrm{Rkadapt}(x, 0, 2, 20, F)$$

	0	1
0	0	1
1	0.1	1.105
2	0.2	1.219
3	0.3	1.343
4	0.4	1.476
5	0.5	1.617
6	0.6	1.767
7	0.7	1.925
8	0.8	2.091
9	0.9	2.265
10	1	2.446
11	1.1	2.636
12	1.2	2.833
13	1.3	3.037
14	1.4	3.249
15	1.5	3.469

X = (table above)

Мисал 4.2.1. Дифференциалдык теңдемелердин системалары үчүн $[0,3]$ кесиндисинде $n = 90$, $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2$ шарттары менен Коши маселесин туруктуу кадам менен Рунге-Кутта усулун колдонуп чечкиле жана графигин чийгиле:

$$\frac{dx_1}{dt} = -t \cdot x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 \cdot x_2, \tag{28}$$

Чыгаруу.

$$ORIGIN := 1$$

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

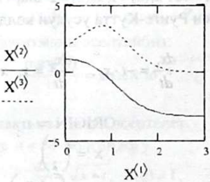
$$F(t, x) := \begin{pmatrix} -t \cdot x_2 \\ x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$$X := rkfixed(x, 0, 3, 90, F)$$

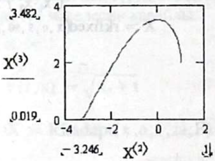
$X =$

	1	2	3
46	1.5	-2.145	1.614
47	1.533	-2.224	1.5
48	1.567	-2.298	1.392
49	1.6	-2.369	1.287
50	1.633	-2.436	1.188
51	1.667	-2.499	1.094
52	1.7	-2.557	1.006
53	1.733	-2.613	0.923
54	1.767	-2.664	0.845
55	1.8	-2.712	0.773
56	1.833	-2.757	0.705
57	1.867	-2.798	0.643
58	1.9	-2.837	0.585
59	1.933	-2.873	0.532
60	1.967	-2.906	0.483
61	2	-2.936	0.439

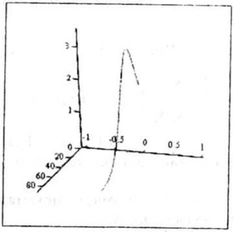
Геометриялык сүрөттөлүшү:



Таблицанын акыркы эки мамычасы фазалык ийрилерди аныктайт:



Интегралдык ийри кнопкасынын жардамында тургузулат:



$X^{\langle 3\rangle}$

Мисал 4.2.2. Экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеменин жакындаштырылган чечимин тапкыла:

$$x'' = txx', \quad x(0) = 1, \; x'(0) = 2 \, .$$

Решение. $x_1 = x, x_2 = x'$ алмаштыруусун пайдаланып, теңдемени системага келтиребиз:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 & x_1(0) = 1 \\ x_2' = tx_1x_2 & x_2(0) = 2 \end{cases}.$$

Барактын талаасына

$$\text{ORIGIN} := 1$$

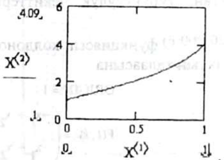
$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$F(t,x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ t \cdot x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$$X := \text{rkfixed}(x, 0, 1, 30, F)$$

кийирип, <X><=> терип, маанилердин таблицасын алабыз(кыскартуу үчүн берилбеди).

Алынган интегралдык ийрининин графикалык сүрөттөлүшү:



Акыркы системаны Розенброктун алгоритми боюнча чечүүнү көрөбүз:

$$\mathrm{ORIGIN} := 1 \qquad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$F(t,x) := \begin{pmatrix} x_2 \\ t \cdot x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix} \qquad J(t,x) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 \cdot x_2 & t \cdot x_2 & t \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

$$Y := \mathrm{Stiffr}(x, 0, 1, 30, F, J)$$

<Y><=> терип маанилердин таблицасын алсак болот.

§3. Автономдук системалар

MathCADдын каражаттарын

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = ax_1 + bx_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = cx_1 + dx_2 \end{cases} \tag{29}$$

автономдук системаларды чечүү теориясында колдонууну мисалдарда карайбыз.

Мисал 4.3.1. Дифференциалдык теңдемелердин системасы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2 \end{cases} \tag{30}$$

көрүнүшүндө берилсин.

1) $(0,0)$ туруктуулук чекиттеринин мүнөзү аныкталсын;

2) $(-10,0), (0,10), (10,0), (0,-10)$ чекиттери аркылуу өткөн фазалык ийрини тургузгула;

3) системанын вектордук талаасын сүрөттөгүлө.

Чыгаруу. 1) eigenvals(A) функциясынын жардамында өздүк сандарды табалы.

$$\mathrm{eigenvals}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1+i \\ -1-i \end{pmatrix},$$

Өздүк сандар комплекстик жана алардын чыныгы бөлүктөрү нөлдөн кичине болгондуктан, туруктуулук чекиттери туруктуу фокус болуп эсептелет.

2) $\mathrm{rkfixed}(x, 0, 20, 200, F)$ функциясын колдонобуз да, фазалык ийрилерди тургузуу үчүн, барактын талаасына

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$F(t,x) := \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

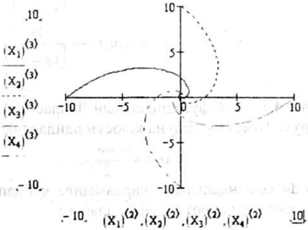
$$x := \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_1 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 20, 200, F)$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad X_2 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 20, 200, F)$$

$$x := \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_3 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 20, 200, F)$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad X_4 := \mathrm{rkfixed}(x, 0, 20, 200, F)$$

кнопкасынын жардамында график тургузуу талаасын чакырып, белгиленген позицияларды толтурабыз да, анын сырткы бөлүгүнө мышты бассак, фазалык ийрилердин сүрөттөлүштөрүн алабыз:



3) интегралдык ийрилерге жанымалардын багыттарынын талаасын тургузуу үчүн барактын талаасына төмөнкү туюнтмаларды кийиребиз:

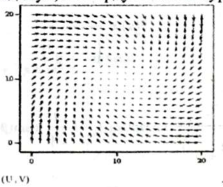
$$u(x, y) := -x + y \qquad v(x, y) := -x - y$$

$$N := 20 \qquad i := 0..N \qquad j := 0..N$$

$$x_i := -4 + 0.4 i \qquad y_j := -4 + 0.4 j$$

$$U_{i,j} := u(x_i, y_j) \qquad V_{i,j} := v(x_i, y_j)$$

кнопкасын колдонуп, вектордук таланы тургузабыз:



§4. Оператордук эсептөөлөр

Лапластын сүрөттөлүштөрүнүн таблицасы,

$$F(x)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt,$$

сызыктуулук касиети, «окшоштук» жана «аралашуу» теоремаларын MathCAD системасында (11) панелдин laplace кнопкасынын жардамында

$$\blacksquare \text{ laplace}, \blacksquare \rightarrow$$

шаблонун чакырып ишке ашырабыз. Белгиленген позициялардын сол жагына берилгенди(оригинал), оң жагына - өзгөрүлмө жазылат.

Шаблонду пайдаланып, мисалы,

$$e^{2\cdot t}+3\,e^{4\cdot t}\text{ laplace },t\rightarrow\frac{1}{(s-2)}+\frac{3}{(s-4)},$$

$$\sin(5\cdot t)\text{ laplace},t\rightarrow\frac{5}{\left(s^2+25\right)},$$

$$e^{2\cdot t}\cdot\cos(3\cdot t)\text{ laplace},t\rightarrow\frac{(s-2)}{\left[(s-2)^2+9\right]}.$$

Мисал 4.4.1. sh^3t функциясынын Лапластык сүрөттөлүшүн тапкыла.

Чыгаруу. Төмөнкү ордуна коюсун пайдаланабыз:

$$sh^3t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

«Expand» командасынын жардамында кубдап, «laplace» операторун кошумчалап, төмөнкү сүрөттөлүштү алабыз:

$$\sinh(t)^3\ \left|\begin{array}{l}\text{substitute},\sinh(t)=\dfrac{\exp(t)-\exp(-t)}{2}\\ \text{expand},t\\ \text{laplace},t\end{array}\right.\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{1}{8\cdot(s-3)}-\frac{3}{8\cdot(s-1)}+\frac{3}{8\cdot(s+1)}-\frac{1}{8\cdot(s+3)}.$$

«Invlaplace» кнопкасынын жардамында лапластын өзгөртүүсүнүн жардамында оригиналы калыбына келтирилет.

Мисал 4.4.2. Сүрөттөлүштүн оригиналы табылсын:

$$F(s)=\frac{s}{\left(s^2+\beta^2\right)^2}.$$

Чыгаруу.

$$\frac{s}{\left(s^2+\beta^2\right)^2}\text{ invlaplace},s\rightarrow\frac{1}{2\cdot\beta}\cdot t\cdot\sin(\beta\cdot t).$$

Оператордук методдун жардамында турактуу коэффициентүү сызыктуу дифференциалдык теңдемелерди жана алардын системаларын MathCAD системасынын каражаттарын пайдаланып чечүүнү мисалдарда карайбыз.

Мисал 4.4.3. Нөлдүк баштапкы шарттар менен берилген дифференциалдык теңдеменин чечимин тапкыла:

$$x' + x = f(t),$$

мында,

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \le t < 2, \\ 0 \text{ при } t \ge 2. \end{cases}$$

Чыгаруу. Алгач теңдеменин оң жак бөлүгүндөгү функциянын сүрөттөлүшүн жазып алабыз. Ал

$$f(s) := \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \exp(-2 \cdot s)$$

көрүнүшүндө болот. Анан белгилүү командалардын жардамында теңдемени чыгарабыз:

$$x' + x = f(t) \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x = X(s) \\ \text{substitute}, x' = s \cdot X(s) \\ \text{substitute}, f(t) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s} \cdot \exp(-2 \cdot s) \\ \text{solve}, X(s) \\ \text{invlaplace}, s \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \exp(-t) - \Phi(t-2) + \Phi(t-2) \cdot \exp(-t+2)$$

мында Ф(t-2)- Хевисайддын бирдик функциясы деп аталат. Чечимди текшерсек,

$$\frac{d}{dt} x(t) + x(t) \text{ simplify } \rightarrow 1 - \Phi(t-2)$$

Жооп. $x = 1 - e^{-t} - \Phi(t-2) + \Phi(t-2) \cdot e^{-(t-2)}$.

Мисал 4.4.4. Нөлдүк баштапкы шарттар менен берилген дифференциалдык теңдеменин чечимин тапкыла:

$$x'' - 2x' + 2x = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x(0) = 1.$$

Чыгаруу.

$$x'' - 2 \cdot x' + 2 \cdot x = \sin(t) \left| \begin{array}{l} \text{substitute}, x'' = s^2 \cdot X(s) - 1 \\ \text{substitute}, x' = s \cdot X(s) \\ \text{substitute}, x = X(s) \\ \text{substitute}, \sin(t) = \dfrac{1}{(s^2+1)} \\ \text{solve}, X(s) \\ \text{invlaplace}, s \end{array} \right. \rightarrow$$

$$-1 + y + \frac{3}{5}\exp(2\cdot t) - \exp(2\cdot t)\,y + \frac{2}{5}\cdot\cos(t) - \frac{1}{5}\cdot\sin(t)$$

Жооп. $-1 + y + \frac{3}{5}\cdot\exp(2\cdot t) - \exp(2\cdot t)\cdot y + \frac{2}{5}\cos(t) - \frac{1}{5}\cdot\sin(t)$.

Мисал 4.4.5. Берилген баштапкы шарттар менен берилген үчүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдеменин чечимин тапкыла:

$$x''' + 3x'' + 3x' + x = te^{-1}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

Чыгаруу.

$$t\cdot\exp(-t)\ \text{laplace}, t \ \rightarrow \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$x''' + 3\cdot x'' + 3\cdot x' + x = t\cdot\exp(-t) \left|\begin{array}{l} \text{substitute}, x = X(s) \\ \text{substitute}, x' = s\cdot X(s) \\ \text{substitute}, x'' = s^2\cdot X(s) \\ \text{substitute}, x''' = s^3\cdot X(s) \\ \text{substitute}, t\cdot\exp(-t) = \dfrac{1}{(s+1)^2} \\ \text{solve}, X(s) \\ \text{invlaplace}, s \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot y + \frac{1}{3}\cdot\exp\left(\frac{-3}{2}\cdot t\right)\cdot y\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot t\right) + \frac{1}{3}\cdot\exp\left(\frac{-3}{2}\cdot t\right)\cdot y\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot t\right) - \frac{1}{3}\cdot\exp\left(\frac{-3}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot t\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\cdot\exp\left(\frac{-3}{2}\cdot t\right)\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot t\right) - t\cdot\exp(-t)$$

Мисал 4.4.6. Теңдемелердин системасынын жалпы чечимин тапкыла:

$$\begin{cases} x'' + y' = t \\ y'' - x' = 0. \end{cases}$$

Чыгаруу.

$$\begin{pmatrix} x'' + y' = t \\ y'' - x'' = 0 \end{pmatrix} \left|\begin{array}{l} \text{substitute}, x' = s\cdot X(s) - C_1 \\ \text{substitute}, x'' = s^2\cdot X(s) - s\cdot C_1 - C_2 \\ \text{substitute}, y' = s\cdot Y(s) - C_3 \\ \text{substitute}, y'' = s^2\cdot Y(s) - s\cdot C_3 - C_4 \\ \text{substitute}, t = \dfrac{1}{s^2} \\ \text{solve}, \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\to \left[\frac{1}{s^3} \cdot \frac{\left(s^2 \cdot C_1 + s^3 \cdot C_1 + C_2 \cdot s + C_2 \cdot s^2 - C_4 \cdot s + 1\right)}{(1+s)} \quad \frac{\left(s^3 \cdot C_3 + C_4 \cdot s^2 + C_3 \cdot s^2 + 1\right)}{s^3 \cdot (1+s)} \right]$$

$X(s)$ жана $Y(s)$ маанилерин копиялап, алардын оригиналдарын табабыз.

$$\frac{1}{s^3} \cdot \frac{\left(s^2 \cdot C_1 + s^3 \cdot C_1 + C_2 \cdot s + C_2 \cdot s^2 - C_4 \cdot s + 1\right)}{(1+s)} \text{ invlaplace}, s \to$$

$$\to 1 + C_4 + C_1 - t - t \cdot C_4 + t \cdot C_2 + \frac{1}{2} \cdot t^2 - \exp(-t) - \exp(-t) \cdot C_4,$$

$$\frac{\left(s^3 \cdot C_3 + C_4 \cdot s^2 + C_3 \cdot s^2 + 1\right)}{s^3 \cdot (1+s)} \text{ invlaplace}, s \to$$

$$\to C_3 + 1 + C_4 - t + \frac{1}{2} \cdot t^2 - \exp(-t) - \exp(-t) \cdot C_4.$$

Өз алдынча иштөө үчүн мисалдар.

1. Рунге-Кутта усулунун жардамында биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелер үчүн Коши маселесин h=0,1 кадамы менен [n,n+m], y(n)=m кесиндисинде чечкиле.

Чечимдин тактыгын аныктап, аны графикалык сүрөттөлүшүн чийгиле.

а) $y' = n \cdot x \cdot y + m$ б) $y' = n \cdot x + \sin(m \cdot y)$

в) $y' = \dfrac{x \cdot y}{n \cdot x^2 + m \cdot y^2}$ г) $y' = m \cdot y^2 \cdot \exp(x) - n \cdot y$

2. Рунге-Кутта усулунун жардамында дифференциалдык теңдемелердин системасын x(0)=m, y(0)=n баштапкы шарттары менен [0,n] кесиндисинде кадамдардын саны 20n болгондой чечкиле. Эсептөөлөрдүн жыйынтыктары боюнча интегралдык ийрини тургузуп, анын координата тегиздигиндеги проекциясын алгыла.

а) $\begin{cases} x' = m \cdot x + n \cdot y + \cos(n \cdot t) \\ y' = n \cdot x - m \cdot y + \sin(n \cdot t) \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = m \cdot x^2 + n \cdot y + \exp(n \cdot t) \\ y' = n \cdot x - m \cdot y^2 + \sin(m \cdot t) \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = (m \cdot y - n \cdot x) \cdot t \\ y' = (m \cdot y - n \cdot x) \cdot t \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = m \cdot y^2 - n \cdot \cos(x) \\ y' = -n \cdot y + \sin x \end{cases}$

3. Системанын туруктуулук чекитинин(точка покоя) мүнөзүн изилдегиле. (n,0), (-n,0), (0,n), (0,-n) чекиттери аркылуу өткөн фазалык ийрилерин жана ылдамдыктардын вектордук талаасын тургузгула.

а) $\begin{cases} x' = m \cdot x + 2 \cdot n \cdot y \\ y' = 2 \cdot n \cdot x + m \cdot y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = m \cdot x - 2 \cdot n \cdot y \\ y' = 2 \cdot n \cdot x + m \cdot y \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = m \cdot x + 2 \cdot n \cdot y \\ y' = 2 \cdot n \cdot x - m \cdot y \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = m \cdot x - 2 \cdot n \cdot y \\ y' = 2 \cdot n \cdot x - m \cdot y \end{cases}$.

4. Функциялардын Лаплас өзгөртүп түзүүлөрүн тапкыла:

а) $f(t) = mt^2 + nt + mn$, б) $f(t) = \cos^2(mt) + t\sin(nt)$,

в) $f(t) = (mt + nt)^{\frac{m}{m+n}}$, г) $f(t) = (e^{mt} + \cos nt)\ln t$.

5. Өзгөртүп түзүүлөрдүн оригиналдарын калыбына келтиргиле:

а) $F(s) = \dfrac{e^{-ms}}{s-n}$, б) $F(s) = \dfrac{s-(m+n)}{s^2-(m-n)s-mn}$,

в) $F(s) = \dfrac{ms+n}{(s-m)^3(s+n-1)}$, г) $F(s) = \dfrac{1}{\sqrt{m+ns^2}}$.

6. Коши маселесин чечкиле:

а) $x' + nx = me^{-mt}$, $x(0) = m$;

б) $x''(m-n)x' - mnx = (mx+n)e^{(m-n)t}$, $x(0) = m, x'(0) = n$;

в) $x'' + (n+m)^2 x = n^2\sin(mt)$, $x(0) = 0, x'(0) = m + n$.

Адабияттар

1. Дъяконов В. MathCAD 2000: Учебный курс. – СПб.: Питер, 2000.
2. Кудрявцев Е.М. MathCAD 2000 Про. М.: ДМК Пресс, 2001.
3. Кирьянов Д.В. Самоучитель MathCAD 2001. - СПб.: БХВ-Петербург, 2001.
4. Херхагер М., Партолль Х. MathCAD 2000: полное руководство/ Пер.с нем. Киев: Издательская группа BHV, 2000.
5. Аронович А.Б., Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Сборник задач по исследованию операций. М: Изд-во МГУ, 1997.
6. Ефимов А.В., Демидович Б.П. и др. Сборник задач – СПб.: Питер, 2004. - 675 с.
7. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учеб. пособие для втузов. М.: Высшая школа, 1983.
8. Очков В.Ф. MathCAD 8 Pro. М.: Компьютер Пресс, 1999.

ОШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
БИБЛИОТЕКА
ИНВ.№ 80=007.
80с

Басууга берилди: 16.06.2008.

Формат: 60х84 1/16
Буйрутма: №26

Көлөмү: 4,75 б.т.
Нускасы: 400 даана.

ОшМУ, "Билим" редакциялык-басма бөлүмү
Ош шаары, Ленин к., 331, каб.135., тел.: 7.20.61

944219